

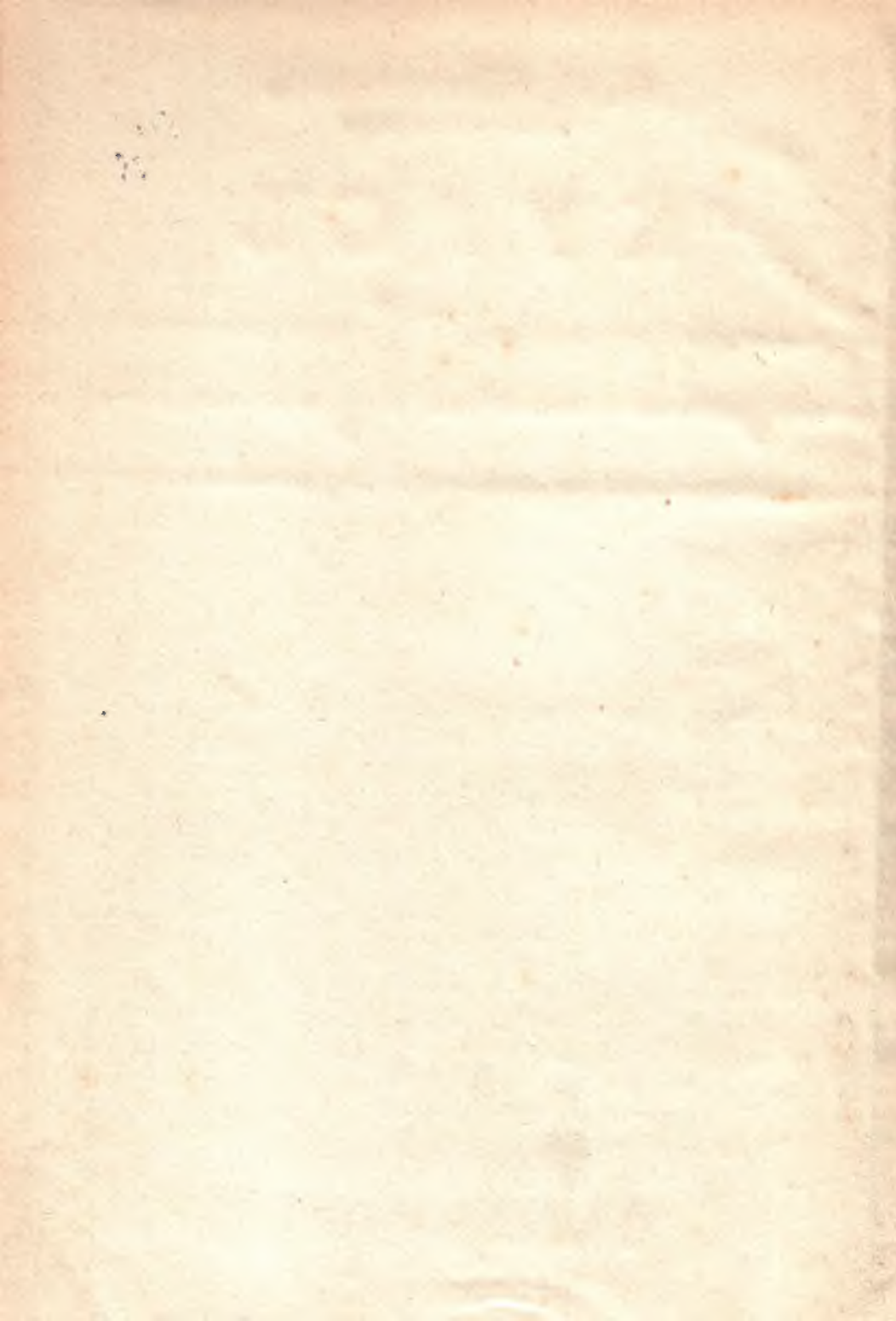
511
41-45

П. Н. Шмулевичъ

КУРСЪ
Теоретической Ариѳметики

Складъ Изданія
СПБ. Ивановская 6.

2259



Книгоиздательство Инженера П. К. Шмудевича.

Отдѣлъ I. По каталогу № 4.

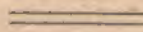
571
Ш-75

КУРСЪ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ АРИΘМЕТИКИ

въ объемѣ программъ вступительныхъ экзаменовъ
въ спеціальныхъ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ.

22590/a
Библиотечный
Институтъ в Москвѣ

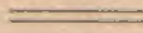
59



СОСТАВИЛЪ

П. К. Шмудевичъ,

ИНЖЕНЕРЪ ПУТѢЙ СООБЩЕНІЯ.



Изданіе десятое.

проекуано
1960 г.



Цѣна 1 руб., перес. 20 коп.

ПЕТРОГРАДЪ.

Складъ изданія у автора: Ивановская ул., д. 6. Телеф. 436-85.

1917.

ВЕРХ

ИЗДАНИЕ

Содержание

1. Введение

2. Глава I

3. Глава II

4. Глава III

5. Глава IV

6. Заключение

Отъ автора.

При внимательномъ просмотрѣ приведенной въ концѣ настоящей книги программы вступительныхъ экзаменовъ по Ариѳметикѣ въ спеціальныхъ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ, нетрудно убѣдиться, что ни одно изъ существующихъ на русскомъ языкѣ оригинальныхъ и переводныхъ руководствъ Ариѳметики не даетъ полнаго отвѣта на *всѣ* пункты программы. Даже лучшее и наиболѣе полное руководство Бертрана — Билибина, содержа несравненно больше матеріала, чѣмъ это требуется вышеупомянутой программой, не даетъ отвѣта на нѣсколько ея пунктовъ и поэтому не можетъ вполне удовлетворить потребности молодыхъ людей, готовящихся къ поступленію въ технические Институты. Это обстоятельство, равно какъ и слабая, въ большинствѣ случаевъ, постановка преподаванія Ариѳметики въ выпускныхъ классахъ гимназій и реальныхъ училищъ, отражается весьма печально на конкурсныхъ испытаніяхъ въ спеціальныхъ учебныхъ заведеніяхъ, особенно въ Горномъ Институтѣ, гдѣ на Ариѳметику обращено особое вниманіе, и гдѣ поэтому около *трети* всѣхъ экзаменуемыхъ получаютъ по Ариѳметикѣ неудовлетворительныя отмѣтки, и такимъ образомъ лишаются возможности продолжать экзамены.

Предлагаемый «Курсъ теоретической Ариѳметики въ объемѣ программъ вступительныхъ экзаменовъ въ спеціальныхъ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ», какъ показываетъ само заглавіе, является полнымъ отвѣтомъ на *всѣ* вопросы, которые могутъ быть предложены экзаменуемымъ въ различныхъ Институтахъ. Кромѣ того, желая сдѣлать это руководство пригоднымъ для повторительнаго курса Ариѳметики въ старшихъ классахъ ср.-учебныхъ заведеній, гдѣ программа преподаванія нѣсколько обширнѣе требованій, предъявляемыхъ въ Институтахъ, пришлось вставить нѣсколько теоремъ, которыя, какъ ненужныя для конкурсныхъ экзаменовъ, отпечатаны мелкимъ шрифтомъ. Таковы, напр., теоремы объ общемъ наибольшемъ дѣлителѣ и о наименьшемъ кратномъ для *нѣсколькихъ* чиселъ, объ общемъ признакѣ дѣлимости и нѣкоторыя другія.

При составленіи этой книги были прочитаны очень многія руководства теоретической Ариѳметики, начиная съ классическихъ курсовъ Бертрана-Билибина и Серре, и кончая общеизвѣстными элементарными учебниками Киселева, Малинина и Буренина и др. Всѣ ма-

теріалы подвергались основательной переработкѣ соотвѣтственно порядку послѣдовательнаго изложенія пунктовъ программы и общему уровню математическаго развитія учащихся, для которыхъ предназначена эта книга. Особенное вниманіе обращено на то, чтобы на всѣ пункты программы былъ данъ обстоятельный и строго доказанный отвѣтъ. Съ этой цѣлью пришлось добавить нѣсколько теоремъ, безъ которыхъ пострадала бы строгость и послѣдовательность изложенія. Таковы, напр., теоремы о равноостаточности чисель (§§ 48 и 49), почему-то не вошедшія въ программу, но безусловно необходимыя для строгаго изложенія теоріи періодическихъ дробей, и нѣкот. другія, менѣе важныя. Для облегченія возможности письменнаго изложенія условія теоремъ при отвѣтѣ, введены нѣкоторыя полезныя сокращенныя обозначенія, какъ-то:

ост. $(a : b)$; *част.* $(a : b)$; *о. и. д.* $(a : b)$; *н. кр.* (a, b) ,

обозначающія соотвѣтственно:

остатокъ отъ дѣленія a на b ; частное отъ дѣленія a на b ; общій наибольшій дѣлитель чисель a и b ; наименьшее кратное чисель a и b . Подобныя сокращенія даютъ возможность записывать условія теоремъ нѣсколькими буквами, что представляетъ значительное удобство для экзаменуемыхъ.

Настоящее десятое изданіе Ариѳметики перепечатано съ очень незначительными измѣненіями противъ девятого, въ которомъ по сравненію съ прежними изд. были сдѣланы нѣкоторыя перемѣны и добавленія, соотвѣтствующія новѣйшимъ требованіямъ на экзаменѣ по Ариѳметикѣ, главнымъ образомъ, въ Горномъ Институтѣ, гдѣ попрежнему этотъ экзаменъ является роковымъ для большинства экзаменуемыхъ. Всѣ вновь внесенные параграфы отмѣчены буквой a , чтобы не нарушать нумераціи, и, такимъ образомъ, въ книгѣ осталось попрежнему 150 параграфовъ, несмотря на увеличеніе ея объема по сравненію съ первыми изданіями. Въ теперешнемъ видѣ предлагаемая книга вполне отвѣчаетъ новѣйшимъ экзаменаціоннымъ требованіямъ.

Въ виду совершенно невѣроятнаго вздорожанія бумаги (на 400% и выше) и типографскихъ работъ (болѣе чѣмъ на 100%) стоимость книги повышена съ 75 к. до 1 руб. Надѣюсь, что ко времени выхода слѣдующаго изданія г. г. бумажные фабриканты и торговцы будутъ сокращены и окажется возможнымъ вернуться къ прежней цѣнѣ.

Сентябрь, 1916 года.

Л. Шмулевичъ.

ОТДѢЛЪ I.

Ариѳметическія дѣйствія надъ цѣлыми числами.

ГЛАВА I.

Сложеніе и вычитаніе.

I. ОПРЕДѢЛЕНІЯ. Суммой двухъ или нѣсколькихъ чиселъ (слагаемыхъ) называется число, содержащее столько единицъ, сколько ихъ заключается во всѣхъ данныхъ числахъ, вмѣстѣ взятыхъ.

Сложеніе есть дѣйствіе, при помощи котораго опредѣляется сумма двухъ или нѣсколькихъ чиселъ.

Разностью двухъ чиселъ называется такое третье число, которое будучи прибавлено къ меньшему изъ данныхъ чиселъ (вычитаемому) воспроизводитъ большее (уменьшаемое).

Вычитаніе есть дѣйствіе, при помощи котораго опредѣляется разность двухъ чиселъ.

2. Дѣйствіе сложенія обозначается знакомъ $+$, который произносится „плюсъ“; равенство двухъ величинъ обозначается знакомъ $=$, который произносится „равно“.

Напр., равенство $a + b = c$ показываетъ, что сумма двухъ чиселъ a и b равна числу c .

Дѣйствіе вычитанія обозначается знакомъ $-$, который произносится „минусъ“. Такъ, напр., равенство $a - b = c$ показываетъ, что разность двухъ чиселъ a и b равна числу c .

Кромѣ знаковъ $+$, $-$, $=$ полезно замѣтить еще знаки *нера-*

венства $>$ и $<$, которые читаются *больше* и *меньше*. Напр., неравенства

$$a + b > c ; a - b < d$$

соответственно показывают, что сумма чисел a и b больше числа c , и что разность чисел a и b меньше d .

3. Если обозначить буквой c разность двух чисел a и b , то на основании определения понятия о разности (§ 1) можно сказать, что c , будучи прибавлено къ b , дастъ a , т. е. выводимъ заключение, что равенства:

$$a - b = c$$

и

$$b + c = a$$

вполнѣ равносильны и могутъ замѣнять другъ друга.

Изъ этихъ же равенствъ видно, что *уменьшаемое всегда равно суммѣ вычитаемого и разности.*

Поэтому можно сказать, что *вычитание есть дѣйствіе, обратное сложению: въ немъ по данной суммѣ (уменьшаемому) и одному изъ слагаемыхъ (вычитаемому) находится величина другого слагаемаго (разность).*

4. Начала, на которыхъ основывается теорія сложения и вычитанія.

1. Величина суммы не зависитъ отъ порядка слагаемыхъ.

Справедливость этого начала вполнѣ очевидна, такъ какъ въ какомъ бы порядкѣ ни соединять данныя числа въ общую сумму, число единицъ, заключающихся въ каждомъ изъ слагаемыхъ, остается неизмѣннымъ, а потому и сумма ихъ измѣниться не можетъ.

2. Величина суммы не измѣнится, если разложить данныя числа на нѣсколько отдѣльныхъ частей, сложить эти части одиѣ съ другими въ какомъ угодно порядкѣ и полученныя суммы соединить въ одну.

Ясно, что полученный такимъ образомъ результатъ будетъ содержать *всѣ части* данныхъ чиселъ, а потому будетъ ихъ суммой.

Примѣчаніе. Начало это даетъ возможность привести сложение двухъ какихъ угодно чиселъ къ сложению чиселъ, меньшихъ десяти.

3. Если два числа разложены на одно и то-же число частей такъ, что части меньшаго числа не превышаютъ соответственныхъ частей большаго, то разность этихъ чиселъ равна суммѣ разностей соответствующихъ частей.

4. Разность двух чисел не измѣняется отъ увеличенія ихъ обоихъ на одно и то-же число.

Справедливость началъ 3 и 4 непосредственно вытекаетъ изъ сдѣланнаго выше опредѣленія вычитанія.

5. Если надъ невычисленнымъ еще результатомъ какогонибудь дѣйствія хотятъ произвести новое дѣйствіе, то выраженіе, содержащее указаніе перваго дѣйствія, заключаютъ въ скобки, передъ которыми ставятъ знакъ, выражающій второе дѣйствіе.

Такъ, напр., если къ числу a надо прибавить заранѣе вычисленную разность чиселъ b и c , то это можетъ быть обозначено такъ:

$$a + (b - c).$$

Подобнымъ же образомъ выраженіе

$$a - (b + c)$$

показываетъ, что изъ числа a надо вычесть сразу всю сумму чиселъ b и c ; также

$$a - (b - c)$$

обозначаетъ, что къ числу a надо прибавить сумму чиселъ b и c и т. д.

6. ЗАМѢЧАНІЕ. Для правильнаго усвоенія дальнѣйшаго курса, очень важно умѣть различать условія, *необходимыя* для существованія какойнибудь истины, отъ *условій достаточныхъ*.

Условіе называется *необходимымъ*, если при невыполненіи его данная истина не имѣетъ мѣста. Такъ, напр.: для того, чтобы изъ числа a можно было вычесть число b , *необходимо*, чтобы a было больше b , такъ какъ въ противномъ случаѣ въ арифметикѣ дѣйствіе вычитанія невозможно.

Условіе называется *достаточнымъ*, если при соблюденіи его данная истина имѣетъ мѣсто *безусловно всегда*. Такъ, напр.: для того, чтобы изъ числа a можно было вычесть число b , *достаточно* условіе, чтобы a было больше b , такъ какъ при соблюденіи этого условія всегда *) можно найти разность $a - b$.

Наконецъ, условіе называется *необходимымъ и достаточнымъ*, если оно удовлетворяетъ обимъ вышеприведеннымъ требованіямъ. Такъ, напр., разсматривая предыдущіе примѣры, можемъ

*) Очевидно рѣчь идетъ объ *отрицательныхъ* числахъ, такъ какъ, въ случаѣ *чиселъ именованныхъ*, *необходимо* еще, чтобы числа a и b были *однородны*.

сказать: для того, чтобы изъ числа a можно было вычесть число b , необходимо и достаточно, чтобы a было больше b .

7. ТЕОРЕМА *). Для того, чтобы прибавить къ числу сумму двухъ или нѣсколькихъ чиселъ, достаточно прибавить послѣдовательно всѣ слагаемыя этой суммы.

Требуется доказать формулу:

$$a + (b + c) = a + b + c?$$

Справедливость этой формулы непосредственно вытекаетъ изъ 2-го начала сложения (§ 4), такъ какъ на основаніи этого начала можно число $(b + c)$ разложить на отдѣльныя части b и c и сложить послѣдовательно эти части съ числомъ a .

Итакъ:

$$a + (b + c) = a + b + c, \text{ что и тр. док.}$$

8. ТЕОРЕМА. Для того, чтобы прибавить къ числу разность двухъ чиселъ, достаточно прибавить уменьшаемое и вычесть вычитаемое.

Требуется доказать формулу:

$$a + (b - c) = a + b - c?$$

Если-бы мы къ числу a прибавили только b , то получившаяся при этомъ сумма $a + b$ не представляла-бы требуемаго результата, такъ какъ мы къ a прибавили b единицъ, а нужно было прибавить на c единицъ меньше; чтобы исправить сдѣланную такимъ образомъ ошибку, нужно отъ $a + b$ отнять еще c единицъ, что дастъ $a + b - c$.

Итакъ:

$$a + (b - c) = a + b - c, \text{ что и тр. док.}$$

9. ТЕОРЕМА. Для того, чтобы вычесть изъ числа сумму двухъ или нѣсколькихъ чиселъ, достаточно вычесть послѣдовательно каждое изъ слагаемыхъ этой суммы.

Требуется доказать формулу:

$$a - (b + c) = a - b - c?$$

*) Теоремой называется предложеніе безусловно справедливое, но не-однозначно очевидное, а потому требующее доказательства.

Если бы требовалось изъ числа a вычесть только b , то искомая разность была бы $a - b$; но намъ нужно вычесть на c единицъ больше чѣмъ b , а потому надо отъ разности $a - b$ отнять еще c единицъ.

Итакъ:

$$a - (b + c) = a - b - c, \text{ что и тр. док.}$$

10. ТЕОРЕМА. Для того, чтобы вычесть изъ числа разность двухъ чиселъ, достаточно вычесть уменьшаемое и прибавить вычитаемое.

Требуется доказать формулу:

$$a - (b - c) = a - b + c$$

Если бы требовалось изъ a вычесть только b , то искомая разность была-бы $a - b$; но намъ нужно вычесть не b , а $b - c$, т. е. на c единицъ меньше, чѣмъ b , поэтому разность $a - b$ будетъ на c единицъ меньше искомой, а слѣд., эта послѣдняя будетъ $a - b + c$.

Итакъ:

$$a - (b - c) = a - b + c, \text{ что и тр. док.}$$

ГЛАВА II.

Умноженіе цѣлыхъ чиселъ.

11. ОПРЕДѢЛЕНІЯ. Умножить величину на цѣлое число значитъ: повторить данную величину слагаемымъ столько разъ, сколько въ этомъ числѣ содержится единицъ и вычислить полученную сумму

Данная величина называется *множимымъ*; число—*множителемъ*, полученная сумма—*произведениемъ*.

Множимое и множитель называются иногда *происходителями* даннаго произведенія.

Умноженіе обозначается знакомъ \times или просто точкой (\cdot). Если числа выражены буквами, то знака умноженія можно и не писать. Напр., a умноженное на b можно писать $a \times b$; или $a \cdot b$, или, наконецъ, просто ab .

На основаніи сдѣланнаго опредѣленія дѣйствія умноженія цѣлыхъ чиселъ можно написать:

$$a \cdot b = \underbrace{a + a + a + \dots + a}_{b \text{ разъ.}}$$

b разъ.

12. ТЕОРЕМА. Величина произведенія двухъ чиселъ не измѣнится, если перемѣнить порядокъ производителей.

Требуется доказать, что

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Въ самомъ дѣлѣ, умножить a на b значитъ повторить b разъ слагаемымъ число a , или, что одно и то-же, каждую изъ a единицъ, образующихъ число a . Но если каждую изъ единицъ повторить слагаемымъ b разъ, то она обратится въ b ; всѣхъ такихъ единицъ было a ; итакъ $a \cdot b = b \cdot a$.

Можно эту теорему доказать и иначе.

Образуемъ таблицу, состоящую изъ единицъ, расположенныхъ въ b горизонтальныхъ строчкахъ по a единицъ въ каждой:
 a разъ

1	1	1	1	}	b разъ.	
1	+	1	+	1	+	+			1
1	+	1	+	1	+	+			1
.
1	+	1	+	1	+	+			1

Сумму всѣхъ единицъ, заключающихся въ этой таблицѣ, можно опредѣлить двоякимъ образомъ:

1. Считая по горизонтальнымъ строчкамъ, видимъ, что въ каждой строкѣ заключается a единицъ; всего такихъ строчекъ имѣется b ; итакъ, общая сумма равна $a \cdot b$.

2. Считая по вертикальнымъ столбцамъ, видимъ, что въ каждомъ столбцѣ заключается b единицъ; всего такихъ столбцовъ имѣется a ; итакъ, общая сумма равна $b \cdot a$.

Но мы знаемъ, что величина суммы не зависитъ отъ порядка слагаемыхъ, а потому

$$a \cdot b = b \cdot a, \text{ что и тр. док.}$$

13. ТЕОРЕМА. Для того, чтобы умножить сумму двухъ или нѣсколькихъ чиселъ на какое-нибудь число, достаточно каждое изъ слагаемыхъ умножить на то-же число и полученные произведенія сложить.

Требуется доказать формулу:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

На основаніи опредѣленія умноженія (§ 11) можно написать:

$$(a + b) \cdot c = \underbrace{(a + b) + (a + b) + \dots + (a + b)}_{c \text{ разъ}}$$

откуда, вслѣдствіе неизмѣняемости суммы отъ перемѣны мѣстъ слагаемыхъ:

$$(a + b) \cdot c = \underbrace{a + a + \dots + a}_{c \text{ разъ}} + \underbrace{b + b + \dots + b}_{c \text{ разъ}}$$

или, наконецъ:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \text{ что и тр. док.}$$

14. Равенство, выведенное въ предыдущемъ параграфѣ:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

можетъ быть выражено словами еще такъ: *Произведеніе суммы нѣсколькихъ данныхъ чиселъ на какое-нибудь число равняется суммѣ произведеній данныхъ чиселъ на это же число.*

Это же равенство можно переписать такъ:

$$a \cdot c + b \cdot c = (a + b) \cdot c$$

и тогда оно выражаетъ, что *сумма произведеній нѣсколькихъ чиселъ на одно и то-же число равна произведенію суммы этихъ чиселъ на то-же самое число.*

15. ТЕОРЕМА. Для того, чтобы умножить число на сумму нѣсколькихъ чиселъ, достаточно умножить его отдѣльно на каждое слагаемое и результаты сложить.

Требуется доказать, что

$$c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b?$$

Мы знаемъ, что величина произведенія двухъ чиселъ не измѣняется отъ перестановки производителей (§ 12), а потому формула

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

можетъ быть переписана такъ:

$$c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b, \text{ что и тр. док.}$$

16. ТЕОРЕМА. Для того, чтобы умножить разность на какое-нибудь число, достаточно умножить на это число отдѣльно уменьшаемое и вычитаемое и вычесть второе произведеніе изъ перваго.

Требуется доказать формулу:

$$(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c?$$

Пусть $a - b = d$; тогда (§ 1) $a - b = d$.

Умножаемъ обѣ части послѣдняго равенства на c .

$$a \cdot c = (b + d) \cdot c = b \cdot c + d \cdot c;$$

отсюда заключаемъ (§ 3), что

$$d \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$$

или, подставляя вмѣсто d его значеніе $a - b$:

$$(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c, \text{ что и тр. док.}$$

17. Равенство, выведенное въ предыдущемъ параграфѣ:

$$(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$$

можетъ быть выражено словами еще такъ: *Произведение разности двухъ чиселъ на какого-нибудь множителя равно разности произведений этихъ чиселъ на того-же множителя.*

Это же равенство можетъ быть переписано такъ:

$$a \cdot c - b \cdot c = (a - b) \cdot c$$

и тогда оно выражаетъ, что *разность произведений двухъ чиселъ на одного и того же множителя равна произведению разности этихъ чиселъ на того-же множителя.*

18. ТЕОРЕМА. Для того, чтобы умножить число на разность достаточно умножить его порознь на уменьшаемое и на вычитаемое и изъ перваго результата вычесть второй.

Требуется доказать формулу:

$$c \cdot (a - b) = c \cdot a - c \cdot b?$$

Формула эта получается непосредственно изъ только что выведенной формулы:

$$(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c,$$

принимая во вниманіе теорему о неизмѣняемости произведенія двухъ чиселъ отъ перестановки производителей (§ 12).

19. *Произведемъ нѣсколькихъ чиселъ называется результатъ, который получится, если умножить первое изъ чиселъ на второе, полученное произведение на третье, это произведение на четвертое и т. д., до тѣхъ поръ, пока не дойдемъ до послѣдняго числа.*

Такимъ образомъ, произведеніе чиселъ a, b, c, d есть ре-

результатъ, который найдемъ, если умножимъ a на b , найденное произведение умножимъ на c и это новое произведение на d .

Обозначается это дѣйствие слѣдующимъ образомъ:

$$a \times b \times c \times d, \text{ или } a . b . c . d$$

и читается такъ: a , *умноженное на b , умноженное на c , умноженное на d .*

Числа a, b, c, d называются *производителями* или *сомножителями* данного произведенія.

Если произведение нѣсколькихъ сомножителей заключено въ скобки, то оно разсматривается, какъ *одинъ* множитель. Такъ напр., произведеніе

$$a . b . (c . d) . e$$

представляетъ произведеніе не пяти, а всего четырехъ множителей, причемъ вычисленный результатъ произведешя $(c . d)$ надо считать третьимъ множителемъ.

20. Нетрудно убѣдиться, что, *если скобки стоятъ въ началѣ произведенія, то они могутъ быть отброшены безъ всякаго измѣненія въ послѣдовательномъ ходѣ дѣйствія.* Въ самомъ дѣлѣ, напр., каждое изъ произведеній

$$(a . b) . c . d; (a . b . c) . d; a . b . c . d$$

означаетъ одно и то-же: a умножается на b , полученное произведеніе на c и это произведеніе на d .

Отсюда можно вывести слѣдующее очень важное для дальнѣйшаго изложенія заключеніе:

Въ произведеніи какого угодно числа сомножителей можно, не нарушая послѣдовательнаго хода дѣйствія, произвольное число множителей, начиная съ перваго, заключать въ скобки, т. е. разсматривать, какъ одинъ множитель.

И наоборотъ:

Скобки заключающія сколько угодно сомножителей, начиная съ перваго, могутъ быть отброшены безъ всякаго вліянія на послѣдовательный ходъ дѣйствія.

Примечаніе. Нетрудно убѣдиться, что заключеніе въ скобки нѣсколькихъ множителей (не начиная съ перваго изъ нихъ) нѣмнѣяетъ послѣдовательнаго хода вычисленія и потому теорема о показателяхъ теорема § 25 не можетъ быть допустима.

Въ самомъ дѣлѣ, разсматривая, напр., произведенія

$$a . b . c . d \text{ и } a . (b . c) . d.$$

видимъ, что въ первомъ случаѣ a умножается сперва на b , а полученный результатъ на c , тогда какъ во второмъ случаѣ a умножается непосредственно на вычисленное уже заранѣе произведеніе $(b . c)$ что, также доказано противное, е можетъ считаться за одно и то-же.

21. ТЕОРЕМА. Величина произведенія какого угодно числа множителей не измѣняется отъ перестановки производителей въ какомъ угодно порядкѣ.

Доказательство этой важной теоремы раздѣляется на шесть послѣдовательныхъ частей.

I. Произведеніе двухъ множителей не мѣняется отъ ихъ перестановки,

$$\text{т. е. } a \cdot b = b \cdot a.$$

Теорема эта была уже доказана (§ 12).

Кромѣ двухъ общеизвѣстныхъ доказательствъ этой теоремы, приведенныхъ въ § 12, существуетъ еще слѣдующее, не лишнее интереса доказательство, принадлежащее извѣстному французскому геометру Лежандру:

Если a равно b , то, очевидно, что $a \cdot b = b \cdot a$; поэтому пусть, напр., a больше b , и пусть разность $a - b = c$, т. е. $a = b + c$.

Тогда имѣемъ:

$$a \cdot b = (b + c) \cdot b = b \cdot b + c \cdot b \quad (\text{I})$$

$$b \cdot a = b \cdot (b + c) = b \cdot b + b \cdot c \quad (\text{II})$$

Если намъ удастся доказать, что для двухъ чиселъ b и c , меньшихъ чѣмъ a , произведеніе $c \cdot b = b \cdot c$, то изъ равенствъ (I) и (II) будетъ доказано, что $a \cdot b = b \cdot a$. Но при $b = 1$ и $c = 1$ произведенія bc и cb очевидно равны; слѣд., на основаніи равенствъ (I) и (II) теорема доказана для чиселъ 2 и 1; слѣд. и для чиселъ 3 и 2. . . . и вообще для какихъ угодно чиселъ.

II. Произведеніе трехъ множителей не измѣняется отъ перестановки двухъ послѣднихъ.

Требуется доказать:

$$a \cdot b \cdot c = a \cdot c \cdot b?$$

Напишемъ такую таблицу:

b разъ										
a	$+$	a	$+$	a	$+$	$+$	a		}
a	$+$	a	$+$	a	$+$	$+$	a		
.	$+$.	$+$.	$+$	$+$.		
.	$+$.	$+$.	$+$	$+$.		
a	$+$	a	$+$	a	$+$	$+$	a		

Въ этой таблицѣ число слагаемыхъ въ каждой горизонтальной строкѣ равно b , а число такихъ строкъ c .

Сумму всѣхъ чиселъ, помѣщенныхъ въ этой таблицѣ, можно найти двоякимъ образомъ:

1) Складывая по горизонтальнымъ строчкамъ, находимъ, что сумма чиселъ, написанныхъ въ каждой строкѣ, равна $a \cdot b$;

такъ какъ число всѣхъ такихъ строкъ равно c , то общая сумма всѣхъ чиселъ, написанныхъ въ этой таблицѣ, есть:

$$a \cdot b \cdot c.$$

2) Складывая по вертикальнымъ столбцамъ, находимъ, что сумма чиселъ, написанныхъ въ каждомъ столбцѣ, равна $a \cdot c$; такъ какъ число всѣхъ такихъ столбцовъ есть b , то общая сумма всѣхъ чиселъ въ таблицѣ есть:

$$a \cdot c \cdot b.$$

На основаніи закона объ неизмѣняемости суммы отъ перемѣны порядка слагаемыхъ (§ 4) заключаемъ, что обѣ полученныя суммы равны, т. е.

$$a \cdot b \cdot c = a \cdot c \cdot b, \text{ что в тр. док.}$$

III. Произведение какого угодно числа множителей не измѣняется отъ перестановки двухъ послѣднихъ изъ нихъ.

Требуется доказать:

$$a \cdot b \cdot c \cdot \dots \cdot k \cdot l \cdot n = a \cdot b \cdot c \cdot \dots \cdot k \cdot n \cdot l?$$

Такъ какъ произведение сколькихъ угодно множителей, начиная съ перваго, можно заключать въ скобки, т. е. разсматривать, какъ одинъ множитель (§ 20), то этотъ случай приводится къ предыдущему слѣдующимъ образомъ:

$$a \cdot b \cdot c \cdot \dots \cdot k \cdot l \cdot n = (a \cdot b \cdot c \cdot \dots \cdot k) \cdot l \cdot n,$$

послѣ чего получается произведение трехъ множителей:

$$1) (a \cdot b \cdot c \cdot \dots \cdot k), 2) l, 3) n,$$

что по предыдущему можетъ быть переписано такъ:

$$(a \cdot b \cdot c \cdot \dots \cdot k) \cdot n \cdot l.$$

Итакъ:

$$a \cdot b \cdot c \cdot \dots \cdot k \cdot l \cdot n = (a \cdot b \cdot c \cdot \dots \cdot k) \cdot n \cdot l = a \cdot b \cdot c \cdot \dots \cdot k \cdot n \cdot l, \text{ что в тр. док.}$$

IV. Произведение какого угодно числа множителей не измѣняется отъ перестановки двухъ первыхъ.

Требуется доказать:

$$a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \dots \cdot k = b \cdot a \cdot c \cdot d \cdot \dots \cdot k?$$

- На основаніи § 20 пишемъ:

$$a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \dots \cdot k = (a \cdot b) \cdot c \cdot d \cdot \dots \cdot k \text{ (или на основаніи § 12) } (b \cdot a) \cdot c \cdot d \cdot \dots \cdot k = b \cdot a \cdot c \cdot d \cdot \dots \cdot k, \text{ что в тр. док.}$$

V. Произведение какого угодно числа множителей не изменяется от перестановки двух смежных множителей.

Требуется доказать:

$$a . b . c k . l . m . n = a . b . c l . k . m . n ?$$

Заключаемъ въ скобки столько членовъ, начиная съ перваго (§ 20), чтобы послѣдними множителями въ этихъ скобкахъ оказались тѣ два множителя, которые требуется помѣнять мѣстами, послѣ чего на основаніи III части доказываемой теоремы, получимъ то, что требуется доказать:

$$a . b . c k . l . m . n \quad (a . b . c k . l) . m . n = \\ (a . b . c l . k) . m . n \quad a . b . c l . k . m . n, \text{ что в тр. док.}$$

VI. Произведение какого угодно числа множителей не изменяется от перестановки произвождителей въ какомъ угодно порядкѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, рассмотримъ произведение, множители котораго написаны въ нѣкоторомъ опредѣленномъ порядкѣ. Такъ какъ каждый множитель можно мѣнять мѣстами со смежнымъ, то, взявъ какого нибудь изъ множителей, можно переставить его на одно мѣсто вправо или влѣво, потомъ передвинуть его въ желаемомъ направленіи еще на одно мѣсто, потомъ еще на одно и т. д., пока, наконецъ, онъ не займетъ желаемаго мѣста; то-же можно сдѣлать со всякимъ другимъ, третьимъ и т. д. производителемъ, до тѣхъ поръ, пока все они не будутъ размѣщены въ желательномъ порядкѣ.

22. ТЕОРЕМА. Для того, чтобы умножить произведение сколькихъ угодно множителей на какое нибудь число, достаточно умножить одного изъ производителей на это число.

Требуется доказать:

$$(a . b . c . d) . N = (a . N) . b . c . d = a . (b . N) . c . d = \\ = a . b . (c . N) . d = a . b . c . (d . N) ?$$

Доказательство основано на замѣчаніи § 20 и теоремѣ § 21.

Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи указанныхъ правилъ можемъ повлѣдовательно писать:

$$(a . b . c . d) . N = a . b . c . d . N = a . N . b . c . d = \\ = (a . N) . b . c . d,$$

т. е. умножился множитель a , оставшіеся на своемъ первоначальномъ мѣстѣ.

Или еще такъ:

$$(a \cdot b \cdot c \cdot d) \cdot N = a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot N = b \cdot N \cdot a \cdot c \cdot d = \\ = (b \cdot N) \cdot a \cdot c \cdot d = a \cdot (b \cdot N) \cdot c \cdot d,$$

т. е. умножился множитель b , оставшись на томъ же мѣстѣ.

Или, наконецъ, такъ:

$$(a \cdot b \cdot c \cdot d) \cdot N = a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot N = c \cdot N \cdot a \cdot b \cdot d = \\ = (c \cdot N) \cdot a \cdot b \cdot d = a \cdot b \cdot (c \cdot N) \cdot d,$$

т. е. умножился множитель c , оставшись на своемъ первоначальномъ мѣстѣ и т. д.

23. ТЕОРЕМА. Для того, чтобы умножить число на произведение сколькихъ угодно множителей, достаточно умножить его послѣдовательно на cadaго изъ нихъ.

Требуется доказать:

$$N \cdot (a \cdot b \cdot c \cdot d) = N \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d?$$

Доказательство основано на теоремѣ § 21.

Въ самомъ дѣлѣ, рассматривая $N \cdot (a \cdot b \cdot c \cdot d)$ какъ произведение двухъ множителей N и $(a \cdot b \cdot c \cdot d)$, можемъ писать послѣдовательно такъ:

$$N \cdot (a \cdot b \cdot c \cdot d) = (a \cdot b \cdot c \cdot d) \cdot N = a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot N = \\ = N \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d, \text{ что и тр. док.}$$

24. ТЕОРЕМА. Для того, чтобы умножить произведение какого угодно числа множителей на нѣкоторое другое произведение, достаточно составить новое произведение изъ всѣхъ множителей, входящихъ въ оба данныя.

Требуется доказать:

$$(a \cdot b \cdot c \cdot d) \cdot (m \cdot n \cdot p) = a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot m \cdot n \cdot p?$$

Рассматривая $(a \cdot b \cdot c \cdot d)$ какъ нѣкоторое число, можемъ на основании предыдущей теоремы написать:

$$(a \cdot b \cdot c \cdot d) \cdot (m \cdot n \cdot p) = (a \cdot b \cdot c \cdot d) \cdot m \cdot n \cdot p = \\ = a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot m \cdot n \cdot p, \text{ что и тр. док.}$$

25. ТЕОРЕМА. Во всякомъ произведеніи можно сколько угодно семножителей замѣнить вычисленной величиной ихъ произведенія.

Докажемъ, напр., что въ произведеніи

$$a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f$$

можно множители c, e, f замѣнить ихъ вычисленнымъ заранѣе произведеніемъ $(c \cdot e \cdot f)$,

$$\text{т. е. что } a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f = a \cdot b \cdot (c \cdot e \cdot f) \cdot d?$$

Доказательство этой теоремы основано на томъ соображеніи, что если бы производители, о которыхъ идетъ рѣчь (въ данномъ случаѣ c, e, f), стояли на первомъ мѣстѣ, то предложеніе было бы очевидно на основаніи § 20. Но зная, что произведеніе не мѣняется отъ перестановки сомножителей въ какомъ угодно порядкѣ (§ 21), мы можемъ нужные производители поставить на первое мѣсто, заключить ихъ въ скобки (§ 20) и перенести полученное произведеніе, рассматриваемое уже, какъ одинъ множитель, на какое угодно мѣсто.

Итакъ:

$$a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f = c \cdot e \cdot f \cdot a \cdot b \cdot d = (c \cdot e \cdot f) \cdot a \cdot b \cdot d = a \cdot (c \cdot e \cdot f) \cdot b \cdot d, \text{ или } a \cdot b \cdot (c \cdot e \cdot f) \cdot d, \text{ или } \\ = a \cdot b \cdot d \cdot (c \cdot e \cdot f), \text{ что и тр. док.}$$

26. ОПРЕДѢЛЕНІЯ. Квадратомъ или второй степенью числа называется произведеніе двухъ множителей, равныхъ данному числу.

Кубомъ или третьей степенью числа называется произведеніе трехъ множителей, равныхъ данному числу.

Вообще, n -овой степенью числа называется произведеніе n множителей, равныхъ этому числу.

Число, показывающее, сколько разъ данное число умножается на самого себя, называется показателемъ степени.

Для изображенія степени существуетъ особое законоположеніе: пишуть данное число и надъ нимъ ставятъ сверлу съ правой стороны показателя степени. Такъ напр., a^5 означаетъ a въ пятой степени и равно на основаніи опредѣленія произведенію пяти множителей, равныхъ a .

27. ТЕОРЕМА. Произведеніе степеней одного и того-же числа есть степень того-же числа, показатель которой равенъ суммѣ показателей данныхъ степеней.

Требуется доказать:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} ?$$

На основаніи опредѣленія степени числа и теоремы о перемноженіи двухъ произведеній (§ 24) можно написать:

$$a^m \cdot a^n = \overbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}^{m \text{ разъ}} \cdot \overbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}^{n \text{ разъ}} = \\ = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{m+n \text{ разъ}} = a^{m+n}, \text{ что и тр. док.}$$

ГЛАВА III.

Дѣленіе цѣлыхъ чиселъ.

28. ОПРЕДѢЛЕНІЯ. Раздѣлить цѣлое число на другое цѣлое значить: или составить изъ перваго числа столько равныхъ частей, сколько во второмъ содержится единицъ, и вычислить величину каждой части, или-же узнать, сколько разъ второе число содержится въ первомъ.

Число, которое дѣлимъ, называется *дѣлимымъ*; число, на которое дѣлимъ—*дѣлителемъ*, полученный отъ дѣленія результатъ—*частнымъ*.

Дѣленіе обозначается обыкновенно двоеточіемъ (:), которое произносится „*дѣленное на*“. Напр. $a : b$ читается: *a, дѣленное на b*.

29. Такъ какъ для дѣйствія дѣленія дано *двоюкое опредѣленіе*, то необходимо разъяснить оба эти случая.

Положимъ, во-первыхъ, что требуется раздѣлить a на b равныхъ частей и опредѣлить величину каждой части *).

Въ этомъ случаѣ число a состоитъ изъ b равныхъ, но пока еще неизвѣстныхъ частей.

Если бы мы знали величину каждой части, то, очевидно, взявъ ее b разъ, мы получили бы число a . Другими словами, *умножив частное на дѣлителя, мы получили дѣлимое*.

Итакъ, въ первомъ случаѣ дѣленія *дѣлимое есть произведение, съ которымъ дѣлитель есть множитель, а исконое частное—множимое*.

Положимъ, во вторыхъ, что требуется опредѣлить, сколько разъ число b содержится **), въ числѣ a .

*) Задача дѣленія на части.

**) Задача дѣленія въ смыслъ содержанія.

Въ этомъ случаѣ, число a состоитъ изъ неизвѣстнаго числа частей, каждая изъ которыхъ равна b .

Если бы число этихъ частей было найдено, то, повторивъ число b слагаемымъ столько разъ, сколько въ этомъ найденномъ числѣ содержитсяъ единицъ, мы получили бы, очевидно, опять число a .

Другими словами, *умножая дѣлителя на найденное частное, получимъ дѣлимое.*

Итакъ, во второмъ случаѣ дѣленія, *дѣлимое есть произведение, въ которомъ дѣлитель есть множимое, а искомое частное — множитель.*

30. Сопоставляя сказанное въ предыдущемъ параграфѣ относительно обоихъ случаевъ дѣленія, можно вывести заключение:

Дѣленіе есть дѣйствіе обратное умноженію: при помощи его по данной величинѣ произведенія двухъ чиселъ (дѣлимое) и одному изъ производителей (дѣлитель), находятъ величину другого производителя (частное).

Послѣднее опредѣленіе представляетъ то удобство, что даетъ возможность привести оба случая дѣленія къ одному.

Въ самомъ дѣлѣ, выше было уже доказано, что, не измѣняя величины произведенія двухъ чиселъ, безразлично какое изъ нихъ принять за множимое и какое за множитель (§ 12). Слѣдовательно, при дѣленіи двухъ чиселъ *всегда можно разсматривать дѣлителя, какъ множимое, а искомое частное, какъ множителя даннаго произведенія (дѣлимое).*

Поэтому можно сказать, что *раздѣлить — значитъ всегда узнать сколько разъ дѣлитель содержится въ дѣлимомъ.*

Приводя такимъ образомъ первый случай дѣленія ко второму, мы *измѣняемъ смыслъ дѣйствія, но частное въ обоихъ случаяхъ дѣленія остается неизмѣннымъ, а насъ только это и интересуетъ.*

31. Раздѣляя одно число на другое, напр. a на b , мы не всегда найдемъ такое цѣлое число, произведеніе котораго на дѣлителя въ точности равно дѣлимому. Въ этомъ случаѣ мы будемъ искать два послѣдовательныхъ *) цѣлыхъ числа q и $q+1$, такихъ, чтобы произведеніе $q \cdot b$ было меньше дѣлимаго a , а

*) Т. е. отличающіяся одно отъ другого на одну единицу.

произведение $(q+1) \cdot b$ было-бы больше a , т. е. числа эти q и $q+1$ должны удовлетворять неравенству:

$$q \cdot b < a < (q+1) \cdot b.$$

Числа q и $q+1$, удовлетворяющія такому условию, называются *значеніями частнаго съ точностью до единицы*, причемъ число q представляетъ *недостаточное*, число же $q+1$ — *излишечное* значеніе частнаго.

Недостаточное значеніе частнаго называется также *цѣлой частью частнаго отъ дѣленія a на b* .

Итакъ, можно сдѣлать слѣдующее опредѣленіе:

Цѣлой частью частнаго отъ дѣленія a на b называется наибольшее цѣлое число, произведеніе котораго на дѣлителя меньше дѣляимаго.

Напр., если требуется раздѣлить 39 на 5, то зная, что

$$5 \cdot 7 < 39 < 5 \cdot 8,$$

заключаемъ, что *цѣлая часть частнаго* отъ искомаго дѣленія равна 7.

Также цѣлая часть частнаго отъ дѣленія 96 на 11 равна 8 и т. д.

32. Положимъ, требуется раздѣлить a на b , и пусть цѣлая часть частнаго отъ этого дѣленія равна q .

То-же самое частное q мы получили-бы, если-бы требовалось раздѣлить на b не число a , а число $q \cdot b$, меньшее по условию, чѣмъ a .

Отсюда видно, что для полученія цѣлой части частнаго, мы дѣлимъ на дѣлителя b какъ-бы не все дѣлимое a , но лишь часть его, равную $q \cdot b$, и что нѣкоторая часть числа a , равная разности $(a - q \cdot b)$, остается не раздѣленной на b ; эта часть дѣляимаго называется *остаткомъ отъ дѣленія a на b* .

Назвавъ этотъ остатокъ буквой r , имѣемъ:

$$a - q \cdot b = r,$$

откуда, на основаніи опредѣленія дѣйствія вычитанія, получаемъ (§ 3):

$$a = q \cdot b + r,$$

что даетъ слѣдующую важную зависимость:

Дѣлимое равно произведенію дѣлителя на цѣлую часть частнаго плюсъ остатокъ *).

* Въ частномъ случаѣ, когда дѣленіе a на b можетъ быть выложено безъ гласки говорятъ, что остатокъ равенъ нулю

33. Нетрудно убѣдиться, что остатокъ отъ дѣленія всегда меньше дѣлителя.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть цѣлая часть частнаго отъ дѣленія a на b равна q , и пусть остатокъ отъ этого дѣленія равенъ r .

Тогда по опредѣленію (§ 31) имѣемъ:

$$q \cdot b + r = a < (q + 1) \cdot b.$$

Раземотримъ двѣ разности:

$$a - q \cdot b \text{ и } (q + 1) \cdot b - q \cdot b.$$

Такъ какъ вычитаемыя въ обѣихъ разностяхъ равны, то меньшей изъ нихъ будетъ та, въ которой уменьшаемое меньше, т. е.

$$a - q \cdot b < (q + 1) \cdot b - q \cdot b;$$

но первая изъ этихъ разностей ($a - q \cdot b$) равна r , вторая-же

$$(q + 1) \cdot b - q \cdot b = b - q \cdot b + q \cdot b = b;$$

итакъ $r < b$, что и тр. док.

34. Принимая во вниманіе зависимости, выведенныя въ §§ 31—33, можемъ заключить, что если у насъ существуетъ равенство вида

$$M = N \cdot k + P,$$

гдѣ M , N , k , P суть произвольныя цѣлыя числа, причемъ P меньше чѣмъ N , то при дѣленіи M на N получится частное k и остатокъ отъ дѣленія P , и вообще, если какое либо число можетъ быть представлено въ видѣ суммы двухъ слагаемыхъ, причемъ первое слагаемое дѣлится на какого-нибудь дѣлителя, а второе—меньше его, то частное отъ дѣленія данного числа на этого дѣлителя будетъ равно частному отъ дѣленія на него-же перваго слагаемаго, а остатокъ будетъ равенъ второму.

35. Для удобства дальнѣйшаго изложенія введемъ слѣдующіе условныя обозначенія. Будемъ сокращенно обозначать цѣлую часть частнаго отъ дѣленія a на b слѣдующимъ образомъ:

$$\text{част. } (a : b);$$

остатокъ отъ того-же дѣленія:

$$\text{ост. } (a : b).$$

Кромѣ того, условимся обозначать символами

$$\left(\frac{a}{b} \right)$$

частное отъ дѣленія a на b въ томъ случаѣ, если дѣленіе это можетъ быть выполнено безъ остатка *).

36. ТЕОРЕМА. Если дѣлимое и дѣлитель умножить на одно и то-же число, то частное не измѣнится, а остатокъ умножится на то-же число.

Пусть, напр.:

Дано: част. $(a : b) = q$; ост. $(a : b) = r$.

Треб. док.: част. $(ac : bc) = q$; ост. $(ac : bc) = r \cdot c$?

По условію теоремы можемъ написать (§ 32):

$$a = b \cdot q + r. \quad \dots \dots (1)$$

Умноживъ обѣ части равенства на число c , **) получаемъ $a \cdot c = (b \cdot q + r) \cdot c = (b \cdot q) \cdot c + r \cdot c = (b \cdot c) \cdot q + r \cdot c \dots (2)$

Равенство это показываетъ, что число $(a \cdot c)$ можетъ быть разложено на два слагаемыхъ, изъ которыхъ первое $(b \cdot c) \cdot q$ при дѣленіи на $(b \cdot c)$ даетъ частное q , а второе слагаемое $r \cdot c$ меньше $b \cdot c$, такъ какъ $r < b$; отсюда, на основаніи § 34, заключаемъ, что если $a \cdot c$ раздѣлить на $b \cdot c$, то получится частное q и остатокъ $r \cdot c$, что и тр. док.

37. Какъ изъ равенства (1) предыдущаго параграфа вытекаетъ равенство (2), такъ и наоборотъ, изъ равенства (2) можно получить (1). Отсюда слѣдуетъ **ТЕОРЕМА:**

Если дѣлимое и дѣлитель раздѣлить на одно и то-же число, (предполагая, что такое дѣленіе выполняется безъ остатка), то частное не измѣнится, а остатокъ раздѣлится на то-же число.

38. ЛЕММА *).** Для того, чтобы раздѣлить произведеніе нѣсколькихъ множителей на одного изъ нихъ, достаточно этого множителя уничтожить въ произведеніи.

*) Надо имѣть въ виду, что $\left(\frac{a}{b}\right)$ означаетъ пока только символъ выполненіа дѣленія a на b , и ни въ какомъ случаѣ не должно быть смѣшиваемъ съ понятіемъ о дроби.

**) Очевидно, отъ этого равенство не нарушится, такъ какъ, если $A = B$, то и $A \cdot C = B \cdot C$, т.е. если всѣ слагаемыя одной суммы равны слагаемымъ другой суммы, то и суммы равны.

***) Такъ называется вспомогательная теорема, нужная для того, чтобы доказать другую, болѣе важную теорему. Такъ, напр. при доказательствѣ теоремы о неизмѣняемости произведенія (§ 21) можно было первыя 5 частей доказательства выдѣлить въ особую лемму.

Требуется доказать:

$$(a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e) : d = a \cdot b \cdot c \cdot e?$$

Въ самомъ дѣлѣ, произведеніе $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e$ можно представить такъ:

$$a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e = d \cdot (a \cdot b \cdot c \cdot e).$$

Первую часть этого равенства можно разсматривать, какъ дѣлимое, а вторую часть, какъ произведеніе дѣлителя (d) на частное ($a \cdot b \cdot c \cdot e$). Итакъ:

$$(a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e) : d = a \cdot b \cdot c \cdot e,$$

что и тр. док.

39. ТЕОРЕМА. Для того, чтобы раздѣлить произведеніе на данное число, достаточно раздѣлить на это число одного изъ множителей. (Предполагая, что дѣленіе выполняется безъ остатка).

Пусть, напр., имѣемъ произведеніе $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e$, причемъ извѣстно, что b дѣлится нацѣло на n ; требуется доказать:

$$(a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e) : n = a \cdot \left(\frac{b}{n}\right) \cdot c \cdot d \cdot e?$$

Если частное отъ дѣленія b на n назовемъ буквой q , такъ что

$$b : n = q, \text{ то } b = q \cdot n.$$

Слѣдовательно,

$$(a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e) : n = (a \cdot q \cdot n \cdot c \cdot d \cdot e) : n,$$

что на основаніи предыдущей леммы $= a \cdot q \cdot c \cdot d \cdot e$.

Замѣняя здѣсь q его значеніемъ $\left(\frac{b}{n}\right)$, получаемъ:

$$(a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e) : n = a \cdot \left(\frac{b}{n}\right) \cdot c \cdot d \cdot e, \text{ что и тр. док.}$$

40. ТЕОРЕМА. Для того, чтобы раздѣлить данное число на произведеніе нѣсколькихъ множителей, достаточно раздѣлить его на перваго множителя, цѣлую часть полученнаго частнаго на второго множителя, цѣлую часть этого частнаго на третьяго и т. д., пока не раздѣлимъ послѣдовательнo на всѣхъ множителей. Частное, полученное отъ послѣдняго дѣленія, будетъ равно цѣлой части частнаго отъ непосредственнаго раздѣленія даннаго числа на все произведеніе.

Подраздѣлимъ доказательство этой теоремы на два случая

данное произведение состоитъ I) всего изъ двухъ множителей, II) изъ произвольнаго числа множителей.

I. Пусть требуется раздѣлить число N на произведение a .
Дѣлимъ N на a , и пусть

$$\text{част. } (N : a) = q_1; \text{ ост. } (N : a) = r_1;$$

тогда

$$N = a \cdot q_1 + r_1 \dots \dots \dots (1)$$

Дѣлимъ q_1 на b , и пусть

$$\text{част. } (q_1 : b) = q_2; \text{ ост. } (q_1 : b) = r_2;$$

тогда

$$q_1 = b \cdot q_2 + r_2 \dots \dots \dots (2)$$

Замѣняя въ равенствѣ (1) значеніе q_1 величиной, вычисленной изъ (2), получаемъ:

$$N = a \cdot (b \cdot q_2 + r_2) + r_1 = a \cdot b \cdot q_2 + a \cdot r_2 + r_1.$$

Обозначая сумму $a \cdot r_2 + r_1$ буквой k , переписываемъ послѣднее равенство такъ:

$$N = (a \cdot b) \cdot q_2 + k \dots \dots \dots (3)$$

Разсмотримъ, каково наибольшее возможное значеніе числа k .
Для этого въ равенство

$$k = a \cdot r_2 + r_1$$

надо подставить вмѣсто r_2 и r_1 ихъ наибольшія возможныя значенія. Но r_2 , какъ остатокъ отъ дѣленія на b , всегда меньше b такъ что наибольшее возможное его значеніе равно $b - 1$; такъ же наибольшее возможное значеніе для r_1 равно $a - 1$, ибо $r_1 < a$. Итакъ, изъ всѣхъ возможныхъ значеній k наибольшее есть:

$$k = a \cdot (b - 1) + (a - 1) = a \cdot b - a + a - 1 = a \cdot b - 1,$$

т. е. во всякомъ случаѣ $k < a \cdot b$.

Равенство (3) показываетъ теперь, что число N можетъ быть разложено на два слагаемыхъ: $(a \cdot b) \cdot q_2$, которое дѣлится на цѣло на произведение $a \cdot b$, давая въ частномъ q_2 , и другое слагаемое $k < a \cdot b$. На основаніи § 34 заключаемъ, что при дѣленіи N на произведение $a \cdot b$ цѣлая часть частнаго будетъ равна q_2 , т. е. равна цѣлой части частнаго отъ послѣдовательнаго дѣленія N на a и на b , что и тр. док.

II. Пусть теперь требуется раздѣлить N на произведение произвольнаго числа множителей напр. $a \cdot b \cdot c \cdot d$.

Разсматривая $a \cdot b \cdot c \cdot d$, какъ произведение изъ двухъ мно-

жителей: $a . (b . c . d)$ (§ 25), мы можем на основаніи только что доказаннаго дѣлить сперва N на a и полученное частное q_1 на второго множителя $(b . c . d)$. Но при дѣленіи q_1 на $b . c . d$ мы можем $b . c . d$ разсматривать, какъ произведеніе двухъ множителей $b . (c . d)$ и слѣд. сперва дѣлить q_1 на b , а полученное частное q_2 на $c . d$, а для этого дѣленія, какъ мы уже знаемъ изъ предыдущаго, достаточно раздѣлить q_2 на c и полученное частное q_3 на d . Итакъ, теорема доказана.

ЗАМѢЧАНІЕ. Въ частныхъ случаяхъ можетъ оказаться, что нѣсколько или даже всѣ послѣдовательныя дѣленія могутъ быть выполнены нацѣло. Этотъ случай нисколько не умаляетъ общности приведеннаго доказательства: стоитъ только сдѣлать $r_1, r_2, r_3 . . .$ равными нулю.

Примѣръ. Требуется раздѣлить 5722 на 210.

Дѣля непосредственно, находимъ, что цѣлая часть частнаго равна 27.

Разсматривая 210, какъ произведеніе $2 . 3 . 5 . 7$, можемъ совершить дѣленіе такъ: дѣлимъ 5722 сперва на 2; дѣленіе выполняется нацѣло и частное 2861; дѣлимъ 2861 на 3; цѣлая часть частнаго оказывается равной 953, дѣлимъ 953 на 5 и цѣлую часть частнаго отъ этого дѣленія (190) дѣлимъ на 7; получается 27, т. е. столько же, какъ отъ непосредственнаго дѣленія 5722 на 210.

Можно поступить еще такъ: разсматриваемъ 210, какъ $10 . 21$; дѣля 5722 на 10, находимъ цѣлую часть частнаго 572, дѣля 572 на 21, получаемъ опять 27. Можно также разсматривать 210 какъ $35 . 6$ и т. д.

41. ЗАМѢЧАНІЕ. Поступая по указанному способу, мы получаемъ путемъ послѣдовательныхъ дѣленій только *цѣлую часть частнаго*, что и оставляемъ гдѣ-нибудь существенную часть дѣленія. Можно, впрочемъ, вывести прямо, заю-щю возможность опредѣлить и *окончательный остатокъ* отъ дѣленія даннаго числа на произведеніе: *остатокъ этотъ равенъ суммѣ произведеній остатковъ отъ остатковъ отъ послѣдовательныхъ дѣленій, на всѣхъ факторахъ произведенія, стоящихъ ему.*

Такъ какъ предложеніе это имѣетъ только чисто теоретическій интересъ и не имѣетъ никакихъ практическихъ примѣненій, то доказательство его представляется любознательности учащихся *).

*) Оно можетъ быть легко получено изъ равенства (3) предыдущаго параграфа и аналогичныхъ ему.

ОТДѢЛЪ II.

Основные свойства чиселъ.

ГЛАВА I.

1. О дѣлимости чиселъ.

42. ОПРЕДѢЛЕНІЯ. Если цѣлое число a дѣлится на другое цѣлое число b нullo (т. е. остатокъ отъ этого дѣленія равенъ нулю), то говорятъ, что a есть кратное b . Число b въ этомъ случаѣ называется дѣлителемъ числа a . Такимъ образомъ слова: 1) a дѣлится на b ; 2) a есть кратное b ; 3) b есть дѣлитель a — выражаютъ одно и то-же понятіе.

43. ТЕОРЕМЫ. Если число дѣлится нацѣло всѣ слагаемыя, то оно дѣлится и ихъ сумму.

Если число дѣлится нацѣло уменьшаемое и вычитаемое, то оно дѣлится и разность.

Пусть, напр., a дѣлится на c , и b дѣлится на c .

Требуется доказать: $(a + b)$ и $(a - b)$ дѣлится на c ?

Если a нацѣло дѣлится на c , то, обозначая частное отъ этого дѣленія буквою q_a , имѣемъ: $a = c \cdot q_a$, пусть также $b = c \cdot q_b$.

Тогда сумма и разность чиселъ a и b на основаніи § 13 и 17 могутъ быть представлены такъ:

$$a + b = c \cdot q_a + c \cdot q_b = c \cdot (q_a + q_b);$$

$$a - b = c \cdot q_a - c \cdot q_b = c \cdot (q_a - q_b).$$

Правыя части написанныхъ равенствъ могутъ быть разма-
триваемы, какъ произведенія дѣлителя (c) на частное, отсюда за-
ключаемъ, что

$$(a + b) : c = q_a + q_b,$$

$$(a - b) : c = q_a - q_b.$$

т. е., въ обоихъ случаяхъ дѣленіе выполняется нацѣло, что и тр. док.

44. ТЕОРЕМЫ. Если число дѣлитъ сумму двухъ слагаемыхъ и одно изъ нихъ, то оно дѣлитъ и другое слагаемое.

Если число дѣлитъ разность двухъ чиселъ и одно изъ нихъ, то оно дѣлитъ и другое число.

1. Пусть, напр., дана сумма $a + b = s$, и извѣстно, что a дѣлится на c и s дѣлится на c . *Требуется доказать*, что и b дѣлится на c ?

Равенство $a + b = s$ можетъ быть замѣнено другимъ, равносильнымъ ему (§ 3) равенствомъ:

$$s - a = b,$$

откуда на основаніи предыдущей теоремы (§ 43) заключаемъ, что b , какъ разность чиселъ s и a , дѣлящихся на c , тоже дѣлится на c , что и тр. док.

2. Пусть, напр., дана разность двухъ чиселъ $a - b = d$, и извѣстно, что одно изъ этихъ чиселъ a или b дѣлится на c , и d дѣлится на c ; *требуется доказать*, что и другое число дѣлится на c ?

Равенство $a - b = d$ можетъ быть переписано (§ 3) такъ:

$$a = d + b.$$

Если дано, что, кромѣ d , дѣлится на c число b , то и a дѣлится на c , какъ сумма двухъ чиселъ, кратныхъ c (§ 43).

Если же дано, что кромѣ d дѣлится на c число a , то и b дѣлится на c , по только что доказанной части 1-ой настоящей теоремы.

45. ТЕОРЕМЫ. Если изъ двухъ слагаемыхъ одно дѣлится на какое нибудь число, а другое на него не дѣлится, то и сумма на это число не дѣлится.

Если изъ двухъ чиселъ одно дѣлится на какое нибудь число, а другое на него не дѣлится, то и разность ихъ на это число не дѣлится.

Примѣнимъ способъ доказательства отъ противнаго.

1. Пусть дана сумма $a + b = s$, и извѣстно, что a дѣлится на c , b не дѣлится на c ; требуется доказать, что s не дѣлится на c ?

Въ самомъ дѣлѣ, допустивъ, что s дѣлится на c , получимъ: сумма двухъ чиселъ дѣлится на c , одно изъ чиселъ (a) дѣлится

на c , слѣд. (§ 44) и другое слагаемое b должно дѣлиться на c , что противорѣчитъ условію.

2. Пусть дана разность $a - b = d$, и извѣстно, что a дѣлится на c , b не дѣлится на c ; требуется доказать, что d не дѣлится на c ?

Въ самомъ дѣлѣ, допустивъ, что d дѣлится на c , получимъ: разность двухъ чиселъ дѣлится на c , одно изъ этихъ чиселъ тоже дѣлится на c , слѣд. и другое число b должно бы дѣлиться на c (§ 44), что противорѣчитъ условію.

46. ТЕОРЕМА. Всякое число, дѣлящее другое, дѣлитъ и всѣ числа, кратныя этого послѣдняго.

Пусть a дѣлится на b , и b дѣлится на c . Требуется доказать, что a дѣлится на c ?

Если a дѣлится на b , то можно положить

$$a = b \cdot q = \underbrace{b + b + b + \dots + b}_{q \text{ разъ}}$$

Такъ какъ a состоитъ изъ q слагаемыхъ, по условію дѣлящихся на c , то на основаніи теоремы § 43 заключаемъ, что a дѣлится на c , что и тр. док.

47. ТЕОРЕМА. Если два числа дѣлятся нацѣло на одного и того-же дѣлителя, то и остатокъ отъ раздѣленія большаго изъ данныхъ чиселъ на меньшее тоже нацѣло дѣлится на этого дѣлителя.

Пусть a дѣлится на c , и b дѣлится на c .

Требуется доказать, что ост. $(a : b)$ дѣлится на c ?

Предположимъ, что отъ дѣленія a на b получается частное q и остатокъ r , такъ что

$$a = b \cdot q + r.$$

Какъ видно изъ написаннаго равенства, число a , дѣлящееся на c по условію, представляетъ сумму двухъ чиселъ: $(b \cdot q)$, которое дѣлится на c на основаніи теоремы § 46, и числа r .

Заключаемъ, что и r по теоремѣ § 44 тоже дѣлится на c , что и тр. док.

48. ТЕОРЕМА. Если остатки, получающіеся отъ дѣленія двухъ данныхъ чиселъ на одного и того-же дѣлителя, равны между собой, то разность этихъ чиселъ дѣлится нацѣло на этого дѣлителя.

Дано: ост. $(a : c) = \text{ост. } (b : c)$.

Требуется доказать: (a - b) делится на c?

Пусть при делении a на c получается частное q_a и остатокъ r , такъ что

$$a = c \cdot q_a + r,$$

пусть деление b на c даетъ частное q_b и тотъ же остатокъ r , такъ что

$$b = c \cdot q_b + r.$$

Разность чиселъ a и b представится такъ:

$$a - b = c \cdot q_a + r - (c \cdot q_b + r) = c \cdot q_a + r - c \cdot q_b - r =$$

$$c \cdot q_a - c \cdot q_b,$$

или на основаніи § 17:

$$a - b = c \cdot (q_a - q_b),$$

откуда ясно, что разность $(a - b)$ дѣлится нацѣло на c , что и тр. док.

49. ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА. Если разность двухъ чиселъ дѣлится на какого-нибудь дѣлителя, то остатки, происходящіе отъ раздѣленія каждаго изъ нихъ на того-же дѣлителя, равны между собой *).

Дано: (a - b) дѣлится на c.

Требуется доказать: ост. (a : c) = ост. (b : c)?

Пусть частное отъ дѣленія разности $(a - b)$ на c равно q ; тогда

$$a - b = c \cdot q,$$

что равносильно (§ 3) равенству:

$$a = c \cdot q + b \dots \dots \dots (1)$$

Если остатокъ отъ раздѣленія b на c есть r , а частное отъ этого дѣленія $= q_1$, то

$$b = c \cdot q_1 + r.$$

Подставляя это значеніе вмѣсто b въ равенство (1), получаемъ:

$$a = cq + (cq_1 + r) = cq + cq_1 + r = c \cdot (q + q_1) + r.$$

Отсюда мы видимъ, что число a можетъ быть представлено въ видѣ суммы двухъ слагаемыхъ, изъ коихъ первое $c \cdot (q + q_1)$ дѣлится

*) Теорема эта справедлива и тогда, когда каждое изъ данныхъ чиселъ дѣлится на этого дѣлителя нацѣло, такъ какъ каждый изъ остатковъ въ этомъ случаѣ равенъ нулю.

на c , а второе (r) меньше *) c . Слѣд., на основаніи § 34 заключаемъ, что при дѣленіи a на c получимъ остатокъ r , т. е. тотъ же, какъ и при дѣленіи b на c , что и тр. док.

50. ОПРЕДѢЛЕНІЕ. *Два числа, давая при дѣленіи на одиных и тотъ же дѣлитель равные остатки, называются равноостаточными относительно этого дѣлителя.*

Сопоставляя теорему, изложенную въ § 48, съ обратной ей теоремой § 49, можемъ заключить, что прямая теорема даетъ условіе **необходимое** для равноостаточности двухъ чиселъ, обратная—даетъ условіе **достаточное**, и что обѣ эти теоремы легко соединить въ одну, которую можно формулировать такъ:

Для того, чтобы два числа были равноостаточны относительно одного и того-же дѣлителя, необходимо и достаточно, чтобы разность ихъ дѣлилась на этого дѣлителя.

Б. Признаки дѣлимости чиселъ.

51. ОПРЕДѢЛЕНІЯ. *Признакомъ дѣлимости на даннаго дѣлителя называется условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы какое-нибудь число раздѣлилось нацѣло на этого дѣлителя.*

Общій способъ, при помощи котораго мы будемъ находить признаки дѣлимости чиселъ, заключается въ слѣдующемъ:

Разбиваемъ число N на два слагаемыхъ, напр. $a + b$, такъ, чтобы одно изъ нихъ (напр. a) было завѣдомо кратнымъ названнаго дѣлителя.

Послѣ этого, вспоминая теоремы (§§ 43 и 45).

1. Если каждое изъ слагаемыхъ дѣлится на какого-нибудь дѣлителя, то и сумма тоже дѣлится на этого дѣлителя.

2. Если изъ двухъ слагаемыхъ одно дѣлится, а другое не дѣлится на какого-нибудь дѣлителя, то и сумма не дѣлится на этого дѣлителя,—заключаемъ:

1. *Если второе слагаемое (b) на даннаго дѣлителя не дѣлится, то и число N на этого дѣлителя не дѣлится.*

Слѣдовательно, дѣлимость второго слагаемаго есть условіе, **необходимое** для дѣлимости числа N .

2. *Если второе слагаемое (b) на даннаго дѣлителя дѣлится, то и число N тоже на него дѣлится.*

*) Такъ какъ представляетъ остатокъ отъ дѣленія b на c .

Слѣдовательно, дѣлимость второго слагаемаго есть условіе, достаточное для дѣлимости числа N .

Поэтому можно сказать:

Если данное число N возможно представить въ видѣ суммы двухъ слагаемыхъ такимъ образомъ, что одно изъ нихъ дѣлится на дѣлителя d , то условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы число N раздѣлилось на данного дѣлителя d , состоитъ въ дѣлимости на него-же второго слагаемаго.

Для поясненія этой теоріи на примѣрахъ, выведемъ признаки дѣлимости на 2, 4, 8, 5, 25, 3 и 9.

52. Признаки дѣлимости на 2 и на 5.

ТЕОРЕМА. Всякое число равно числу, кратному 2 или 5, увеличенному на цифру единицъ этого числа.

Въ самомъ дѣлѣ, всякое число N можетъ быть представлено въ видѣ суммы

$$N = 10 \cdot a + b,$$

гдѣ a есть число *десятковъ*, b — *цифра единицъ*.

Первое изъ слагаемыхъ ($10 \cdot a$) на основаніи § 46 дѣлится и на 2 и на 5, такъ какъ 10 есть кратное 2 и 5.

Поэтому, если b дѣлится на 2 (или на 5), то и N дѣлится на 2 (или на 5); если же b не дѣлится, то и N не дѣлится.

Слѣдовательно:

Для того, чтобы число дѣлилось на 2, необходимо и достаточно, чтобы цифра единицъ этого числа была четная.

Для того, чтобы число дѣлилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы цифра единицъ была или 0, или 5.

53. Признаки дѣлимости на 4 и на 25.

ТЕОРЕМА. Всякое число равно числу, кратному 4 или 25, увеличенному на число, изображаемое двумя послѣдними цифрами данного числа.

Въ самомъ дѣлѣ, всякое число N можетъ быть представлено въ видѣ суммы

$$N = 100 \cdot a + b,$$

гдѣ a есть число сотенъ, b — число, изображаемое двумя послѣдними цифрами данного числа.

(Напр. $32715 = 100 \cdot 327 + 15$).

Первое изъ слагаемыхъ ($100 \cdot a$) на основаніи § 46 дѣлится

и на 4, и на 25, такъ какъ 100 есть число, кратное этихъ обонхъ дѣлителей.

Слѣд., если b дѣлится на 4 (или 25), то и N дѣлится на 4 (или 25); если же b не дѣлится на 4 (или 25) то и N не дѣлится.

Отсюда слѣдуетъ:

Для того, чтобы число дѣлилось на 4, необходимо и достаточно, чтобы число, образованное двумя послѣдними его цифрами, дѣлилось на 4.

Для того, чтобы число дѣлилось на 25, необходимо и достаточно, чтобы послѣднія двѣ цифры этого числа были: или два нуля, или 25, или 50, или 75.

54. Признакъ дѣлимости на 8.

ТЕОРЕМА. Всякое число равно числу, кратному 8, увеличенному на число, изображаемое тремя послѣдними цифрами данного числа.

Доказательство аналогично съ предыдущими (§§ 52 и 53), такъ какъ всякое число N можно представить въ видѣ суммы

$$N = 1000 \cdot a + b,$$

гдѣ b есть число, изображаемое тремя послѣдними цифрами данного числа.

Итакъ, для того, чтобы число дѣлилось на 8, необходимо и достаточно, чтобы число, образованное тремя послѣдними цифрами данного числа, дѣлилось на 8.

55. Признакъ дѣлимости на 9.

Для нахождения признака дѣлимости на 9 докажемъ предварительно нѣсколько вспомогательныхъ теоремъ (леммъ).

ЛЕММА I. Всякое число, изображаемое единицей съ однимъ или несколькими нулями, выражаетъ число, кратное девяти, увеличенное на единицу.

Въ самомъ дѣлѣ:

$$10 = 9 + 1; \quad 100 = 9 \cdot 11 + 1; \quad 1000 = 9 \cdot 111 + 1;$$

$$10000 = 9 \cdot 1111 + 1,$$

« нулей

« единицъ

$$\text{и вообще } 1000 \dots 0 = 9 \cdot 111 \dots 1 + 1$$

ЛЕММА II. Всякое число, изображаемое какой-нибудь значущей

цифрой въ сопровожденіи одного или нѣсколькихъ нулей, выражаетъ число, кратное девяти, увеличенное на значеніе этой цифры.

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ, напр., число 50000.

Изъ леммы I мы знаемъ, что

$$10000 = \text{кратн. } 9 + 1,$$

откуда: $50000 = (\text{кратн. } 9 + 1) \cdot 5 = \text{кратн. } 9 + 5$, что и тр. док.

ЛЕММА III. Всякое число, изображаемое какими угодно цифрами, равно числу, кратному девяти, увеличенному на значеніе цифръ этого числа.

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ произвольное число, напр. 56732. Число это можно разсматривать, какъ состоящее изъ слагаемыхъ: $50000 + 6000 + 700 + 30 + 2$.

На основаніи предыдущей леммы имѣемъ:

$$50000 = \text{кратн. } 9 + 5$$

$$6000 = \text{кратн. } 9 + 6$$

$$700 = \text{кратн. } 9 + 7$$

$$30 = \text{кратн. } 9 + 3$$

$$2 = 2.$$

Складывая эти равенства, и замѣчая, что сумма чиселъ, кратныхъ девяти, есть тоже число кратное девяти (§ 43), имѣемъ:

$$56732 = \text{кр. } 9 + (5 + 6 + 7 + 3 + 2), \text{ что и тр. док.}$$

На основаніи послѣдней леммы заключаемъ, что всякое число N можетъ быть представлено въ видѣ суммы:

$$N = \text{кратн. } 9 + S,$$

гдѣ S есть сумма цифръ числа N . Слѣд., вспоминая изложенное въ § 51, можемъ заключить:

Для того, чтобы число дѣлилось на 9, необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифръ дѣлилась на 9.

56. Признакъ дѣлимости на 3 выводится на основаніи слѣдующихъ соображеній: такъ какъ всякое число, кратное 9, есть въ то-же время и кратное 3, и такъ какъ по предыдущему всякое число можетъ быть представлено въ видѣ суммы:

$$N = \text{кратн. } 9 + S = \text{кратн. } 3 + S,$$

гдѣ S —сумма цифръ разсматриваемаго числа, то для того, чтобы число дѣлилось на 3, необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифръ дѣлилась на 3.

57. Общій признакъ дѣлимости на произвольнаго дѣлителя.

Всѣ выведенные признаки дѣлимости можно разсматривать, какъ частные случаи слѣдующаго *общаго признака дѣлимости* на произвольнаго дѣлителя.

Возьмемъ какое нибудь число N , изображаемое слѣдующими и цифрами

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n.$$

Число это можетъ быть представлено такимъ образомъ:

$$N = a_1 + a_2 \cdot 10 + a_3 \cdot 10^2 + a_4 \cdot 10^3 + \dots + a_n \cdot 10^{n-1}.$$

Для нахождения признака дѣлимости на какого нибудь дѣлителя d , поступаемъ такъ: дѣлимъ на этого дѣлителя различныя степени десяти, т. е. числа:

$$10, 10^2, 10^3, \dots, 10^{n-1}.$$

Пусть остатки отъ этихъ дѣленій будутъ соответственно:

$$r_1, r_2, r_3, \dots, r_{n-1},$$

такъ что можно написать рядъ равенствъ:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ 10 &= \text{крат. } d + r_1 \\ 10^2 &= \text{крат. } d + r_2 \\ 10^3 &= \text{крат. } d + r_3 \\ &\dots \\ 10^{n-1} &= \text{крат. } d + r_{n-1} \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 \cdot 10 &= \text{крат. } d + a_2 \cdot r_1 \\ a_3 \cdot 10^2 &= \text{крат. } d + a_3 \cdot r_2 \\ a_4 \cdot 10^3 &= \text{крат. } d + a_4 \cdot r_3 \\ &\dots \\ a_n \cdot 10^{n-1} &= \text{крат. } d + a_n \cdot r_{n-1}. \end{aligned}$$

Складывая все эти равенства, находимъ.

$$N = \text{крат. } d + (a_1 + a_2 r_1 + a_3 r_2 + a_4 r_3 + \dots + a_n r_{n-1}).$$

Итакъ, намъ удалось представить число N въ видѣ суммы двухъ слагаемыхъ, изъ коихъ первое дѣлится на d ; слѣд., на основаніи § 51 заключаемъ, что если второе слагаемое раздѣлится на d , то и N раздѣлится на d , если же второе слагаемое на d не дѣлится, то и N не дѣлится. Такимъ образомъ:

Для того, чтобы какое либо число дѣлилось на произвольнаго дѣлителя d , необходимо и достаточно, чтобы сумма произведеній цифръ этого числа на остатки, получаемые отъ дѣленія на d соответствующихъ степеней десяти, дѣлилась на d .

ГЛАВА II.

Теорія общего наибольшего дѣлителя.

58. ОПРЕДѢЛЕНІЯ. Общимъ дѣлителемъ двухъ или иѣсколькихъ данныхъ чиселъ называется число, дѣлящее нацѣло всѣ данныя числа.

Самый большой по величинѣ изъ общихъ дѣлителей называется общимъ наибольшимъ дѣлителемъ заданныхъ чиселъ

Напр., зная, что числа 30 и 18 имѣютъ общихъ дѣлителей: 1, 2, 3, 6, можемъ сказать, что общій наибольшій дѣлитель чиселъ 30 и 18 равенъ 6.

Для сокращенія письма условимся обозначать общій наибольшій дѣлитель двухъ данныхъ чиселъ a и b символомъ:

$$o. n. d. (a, b).$$

Теорія нахождения общего наибольшего дѣлителя двухъ данныхъ чиселъ при помощи такъ называемаго *последовательнаго дѣленія* основана на нижеслѣдующихъ двухъ теоремахъ.

59. ТЕОРЕМА I. Если большее изъ двухъ данныхъ чиселъ дѣлится на меньшее, то это меньшее и есть ихъ общій наибольшій дѣлитель.

Дано: a дѣлится на b .

Треб. док.: $o. n. d. (a, b) = b$?

Въ самомъ дѣлѣ, общій наибольшій дѣлитель двухъ данныхъ чиселъ не можетъ превышать меньшаго изъ нихъ, потому что онъ долженъ его дѣлить.

Слѣд., если меньшее изъ данныхъ чиселъ (b) дѣлитъ большее (a), то, дѣлясь еще и на самого себя, оно и будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ данныхъ чиселъ a и b , что и тр. док.

60. ТЕОРЕМА II. Если большее изъ двухъ данныхъ чиселъ не дѣлится на меньшее, то ихъ общій наибольшій дѣлитель равенъ общему наибольшему дѣлителю меньшаго изъ нихъ и остатка отъ раздѣленія большаго на меньшее.

Дано: ост. $(a : b) = r$.

Треб. док.: $o. n. d. (a, b) = o. n. d. (b, r)$?

Если обозначимъ буквой q частное отъ дѣленія a на b , то

$$a = b \cdot q + r.$$

Изъ этого равенства видно:

1) Всякое число, дѣлящее a и b , раздѣлитъ и r (§ 44).

2) Всякое число, дѣлящее b и r , раздѣлитъ и a (§ 43).

Слѣдовательно:

1) Любой дѣлитель пары чиселъ (a, b) есть въ то-же время и дѣлитель пары чиселъ (b, r) .

2) Наоборотъ, любой дѣлитель пары чиселъ (b, r) есть въ то-же время и дѣлитель пары чиселъ (a, b) .

Итакъ, *все* общіе дѣлители двухъ паръ чиселъ (a, b) и (b, r) одинаковы, а потому и *наибольшіе* дѣлители обѣихъ паръ одинаковы, что и тр. док.

61. ЗАДАЧА: *Требуется найти общаго наибольшаго дѣлителя двухъ данныхъ чиселъ a и b .*

Дѣлимъ большее число (напр. a) на меньшее. Если a раздѣлится на b нацѣло, то b по § 59 будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ данныхъ чиселъ. Если же a на b не дѣлится, и остатокъ отъ этого дѣленія будетъ r_1 , то по § 60:

$$o. n. d. (a, b) = o. n. d. (b, r_1), \quad (I)$$

т. е. вопросъ сведется къ нахожденію общаго наибольшаго дѣлителя пары чиселъ b и r_1 , меньшихъ чѣмъ данныя. Дѣлимъ b на r_1 . Если дѣленіе это совершится нацѣло, то по § 59 r_1 будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ чиселъ (b, r_1) , а слѣд. на основаніи равенства (I) и чиселъ (a, b) .

Если же b на r_1 не дѣлится, и остатокъ отъ этого дѣленія будетъ r_2 , то по § 60:

$$o. n. d. (b, r_1) = o. n. d. (r_1, r_2). \quad (II)$$

Далѣе, если r_1 дѣлится на r_2 , то r_2 и будетъ общ. наиб. дѣлителемъ пары чиселъ r_1 и r_2 , а слѣд. на основаніи равенствъ (II) и (I) и пары чиселъ (a, b) ; если же остатокъ отъ дѣленія r_1 на r_2 равенъ r_3 , то

$$(III) \quad o. n. d. (r_1, r_2) = o. n. d. (r_2, r_3) \text{ и т. д.}$$

Продолжая поступать такимъ же образомъ, мы образуемъ рядъ чиселъ:

$$a, b, r_1, r_2, r_3, r_4, \dots, r_{n-1}, r_n, r_{n+1}. \quad (a)$$

обладающихъ слѣдующими свойствами:

10. Общій наибольшій дѣлитель произвольныхъ двухъ членовъ этого ряда равенъ общему наибольшему дѣлителю любой тройки и пары, въ томъ числѣ и пары чиселъ (a, b) .

Всѣ члены этого ряда суть **цѣлыя убывающія** числа, такъ какъ каждое изъ нихъ, начиная съ третьяго, представляетъ остатокъ отъ дѣленія, въ которомъ дѣлитель есть предыдущее число.

Такъ какъ остатки r_1, r_2, r_3, \dots представляютъ рядъ убывающихъ *цѣлыхъ* чиселъ, то мы *непрямико* дойдемъ до остатка, равнаго нулю, иначе оказалось бы, что дѣйствие можно продолжать безцѣльно, а оно непременно должно окончиться *).

Пусть, напр., въ ряду (2) остатокъ, равный нулю, будетъ r_{n+1} . Это показываетъ, что общій наибольшій дѣлитель пары чиселъ (r_{n-1}, r_n) равенъ r_n (§ 59), а слѣд., на основаніи свойства 1^о, тотъ же общій и наибольшій дѣлитель будетъ и для чиселъ a и b .

Итакъ, можно установить **правило**.

Для нахождения общаго наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ, дѣля большее число на меньшее, меньшее на первый остатокъ, первый остатокъ на второй остатокъ, второй на третий и т. д., до тѣхъ поръ, пока одно изъ такихъ послѣдовательныхъ дѣленій не выполнится нулемъ. Дѣлитель этого послѣдняго дѣленія и есть искомый общій наибольшій дѣлитель.

62 ТЕОРЕМА. Всякое число, дѣлящее нацѣло данныя числа, дѣлитъ нацѣло и ихъ общаго наибольшаго дѣлителя.

Дано: a дѣл. на c ; b дѣл. на c .

Треб. док.: $o. n. d. (a, b)$ дѣл. на c

Въ самомъ дѣлѣ, пусть, напр., въ ряду послѣдовательныхъ остатковъ $r_1 = 0$ **), тогда общимъ наибольшимъ дѣлителемъ чиселъ a и b будетъ r_2 .

Можно написать рядъ равенствъ:

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = b \cdot q_1 + r_1 \\ b = r_1 \cdot q_2 + r_2 \\ r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3 \\ r_2 = r_3 \cdot q_4 \end{array} \right.$$

*) В. сичемъ дѣлѣ, продолжая послѣдовательныя дѣленія достаточно долго, мы — самымъ *исключительнымъ* случаемъ получимъ одинъ изъ остатковъ, равнымъ единицѣ, которая дѣлится всѣми цѣлыми числами.

**) Или, въ общемъ видѣ $r_n = 0$. Беря для сокращенія письма r_1 вмѣстѣ мы несколько не уменьшимъ общности доказательства.

Изъ этихъ равенствъ заключаемъ:

Изъ перваго, что всякое число c , дѣлящее a и b , дѣлится и r_1 (§ 44);

Изъ втораго, что c , дѣля b и r_1 , раздѣлится и r_2 (§ 44);

Изъ третьяго, что c , дѣля r_1 и r_2 , раздѣлится и r_3 , что и тр. док.

63. ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА. Всякое число, дѣлящее нацѣло общаго наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ, дѣлится нацѣло и эти числа.

Дано: о . н . д (a, b) дѣлится на c .

Треб. док.: a дѣл. на c и b дѣл. на c ?

Разсматривая равенства (A) предыдущаго параграфа, начиная съ послѣдняго, заключаемъ:

Изъ послѣдняго, что c , дѣля r_3 , дѣлится и r_2 (§ 46);

Изъ предпослѣдняго, что c , дѣля r_3 и r_2 , дѣлится и r_1 (§ 43);

Изъ втораго, что c , дѣля r_2 и r_1 , дѣлится и b (§ 43).

Изъ перваго, что c , дѣля r_1 и b , дѣлится и a (§ 43), что и тр. док.

64. ТЕОРЕМА. При умноженіи данныхъ чиселъ на какое-либо число ихъ общій наибольшій дѣлитель умножается на то-же число.

Треб. док.: о . н . д (ac, bc) — [о . н . д (a, b)] . c ?

Въ самомъ дѣлѣ, намъ извѣстно (§ 36), что отъ умноженія дѣлимаго и дѣлителя на одно и то-же число, остатокъ отъ ихъ раздѣленія умножается на то-же самое число.

Слѣд., если остатокъ отъ дѣленія a на b равенъ r_1 , то остатокъ отъ дѣленія ac на bc равенъ r_1c ; также остатокъ отъ дѣленія bc на r_1c равенъ r_2c , и вообще, если найдене общ. наиб. дѣлителя пары чиселъ a и b привело къ ряду чиселъ:

$$a, b, r_1, r_2, r_3, \dots, r_{n-1}, r_n, 0, \quad (I)$$

то найденіе общ. наиб. дѣлителя пары чиселъ ac и bc приведетъ къ ряду чиселъ:

$$ac, bc, r_1c, r_2c, r_3c, \dots, r_{n-1}c, r_nc, 0. \quad (II)$$

Изъ ряда (I) ясно, что

$$\text{о . н . д . } (a, b) = r_n;$$

изъ ряда же II видно:

$$\text{о . н . д . } (ac, cb) = r_n \cdot c, \text{ что и тр. док.}$$

65. ТЕОРЕМА. При дѣленіи данныхъ чиселъ на какое-нибудь число, ихъ общій наибольшій дѣлитель раздѣлится на то-же число.

Треб. док.: $o . н . д . (a, b) \mid o . н . д . (ac, bc)$; e ?

Извѣстно (§ 57), что отъ раздѣленія дѣлимого и дѣлителя на одно и то-же число, остатокъ отъ ихъ дѣленія раздѣлится на то-же самое число. Слѣд., если нахождение общ. наиб. дѣлителя чиселъ ac и bc привело къ ряду чиселъ $(1)^*$, показывающему, что

$$o . н . д . (ac, bc) = r_n \cdot c,$$

то нахождение общ. наиб. дѣлителя чиселъ a и b непременно приведетъ къ ряду $(1)^*$, изъ котораго видно, что

$$o . н . д . (a, b) = r_n, \text{ т. е. } = [o . н . д . (ac, bc)] : c,$$

что и тр. док.

66. ОПРЕДѢЛЕНІЯ. Если общій наибольшій дѣлитель двухъ чиселъ равенъ единицѣ, то такая числа называются **взаимно-простыми**.

Если дано несколько чиселъ такихъ, что общій наибольшій дѣлитель каждой пары чиселъ, комбинаруемыхъ въ какомъ угодно порядкѣ, равенъ единицѣ, то такая числа называются **попарно взаимно-простыми**.

Таковы, напр., числа: 16, 21, 55, 169.

67. ТЕОРЕМА. При раздѣленіи данныхъ чиселъ на ихъ общаго наибольшаго дѣлителя, въ частномъ получаются числа взаимно-простыя.

Дано: $o . н . д . (a, b) = d$.

Треб. док.: число $\left(\frac{a}{d}\right)$ взаимно-прост. съ $\left(\frac{b}{d}\right)$?

Въ самомъ дѣлѣ, изъ теоремы § 65 слѣдуетъ, что если данныя числа раздѣлить на ихъ общаго наибольшаго дѣлителя d , то общій наибольшій дѣлитель ихъ раздѣлится на самого себя, и слѣд. обратится въ единицу, т. е. получатся числа взаимно-простыя, что и тр. док.

68. ТЕОРЕМА. Если число, дѣля произведеніе двухъ множителей, есть число взаимно-простое съ однимъ изъ нихъ, то оно непременно дѣлитъ нацѣло другого множителя.

Дано: a взаимно-прост. съ b ; $a \cdot c$ дѣлится на b .

* См. предыдущій параграфъ.

Треб. док.: с дѣлится на b?

Такъ какъ число a простое съ b , то на основаніи опредѣленія (§ 66) имѣемъ:

$$o . n . d . (a, b) = 1;$$

слѣд. на основаніи § 64:

$$o . n . d . (ac, bc) = c.$$

Число $(a \cdot c)$ дѣлится на b по условию, $(b \cdot c)$ тоже дѣлится на b такъ какъ содержитъ b множителемъ; слѣдовательно, по теоремѣ § 62, общій наибольшій дѣлитель чиселъ $a \cdot c$ и $b \cdot c$, т. е. c , дѣлится на b , что и тр. док.

69. ТЕОРЕМА. Число, дѣлящееся порознь на нѣскольکو попарно взаимно-простыхъ чиселъ, дѣлится и на ихъ произведеніе.

Дано: числа a, b, c, \dots, m попарно вз.-прост.;

N дѣл. на a ; N дѣл. на b ; \dots N дѣл. на m .

Треб. док.: N дѣл. на произведеніе $a \cdot b \cdot c \cdot \dots \cdot m$?

Такъ какъ N дѣлится по условію на a , то можно положить:

$$N = a \cdot q. \tag{I}$$

Число $a \cdot q$, будучи равно N , по условію должно дѣлиться на b ; но a — взаимно-простое съ b ; слѣд., по предыдущей теоремѣ (§ 68) q должно дѣлиться на b , такъ что можно положить

$$q = b \cdot q_1.$$

Подставляя это значеніе q въ равенство (I), получимъ:

$$N = a \cdot b \cdot q_1. \tag{II}$$

откуда видимъ, что N дѣлится на произведеніе $(a \cdot b)$.

Далѣе рассуждаемъ точно такъ-же: произведеніе abq_1 , равное N , по условію должно дѣлиться на c . Рассматривая $a \cdot b \cdot q_1$, какъ произведеніе двухъ множителей $a \cdot (bq_1)$, видимъ, что a — вз.-простое съ c , а потому по теоремѣ § 68 второй множитель, т. е. bq_1 , долженъ дѣлиться на c ; но b — вз.-простое съ c , слѣд. q_1 должно дѣлиться на c , а потому можно положить

$$q_1 = c \cdot q_2.$$

Подставляя это значеніе q_1 въ равенство (II), находимъ:

$$N = a \cdot b \cdot c \cdot q_2.$$

откуда видно, что N дѣлится на произведеніе трехъ множителей $a \cdot b \cdot c$.

Продолжая подобное-же рассужденіе, докажемъ, что N дѣлится и на все произведеніе $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \dots \cdot m$.

70. ЗАМѢЧАНІЕ. Последняя теорема позволяетъ значительно расширить число *известныхъ* намъ признаковъ дѣлимости.

Такъ, напр., зная признаки дѣлимости на 2 и на 3, и принимая во вниманіе, что 2 и 3 суть числа взаимно-простыя, можемъ сказать, что число, дѣлящееся порознь на 2 и 3, раздѣлится и на ихъ произведеніе, т. е. на 6.

Итакъ, для того, чтобы число дѣлилось на 6, необходимо и достаточно, чтобы оно дѣлилось на 2 и на 3.

Также, напр., для того, чтобы число дѣлилось на 18, необходимо и достаточно, чтобы оно дѣлилось на 2 и на 9 *).

Подобнымъ-же образомъ можно вывести признаки дѣлимости на 10, 15, 36, 45, 50, 100 и нѣкотор. друг.

71. Нахожденіе общаго наибольшаго дѣлителя нѣсколькихъ чиселъ. Положимъ, требуется найти общій наибольшій дѣлитель чиселъ a, b, c, d .

Всякій общій дѣлитель этихъ чиселъ, дѣля въ частности a и b , дѣлитъ и ихъ общаго наибольшаго дѣлителя (§ 62) k ; слѣд., онъ является общимъ дѣлителемъ чиселъ:

$$k, c, d.$$

Наоборотъ, всякій общій дѣлитель чиселъ k, c, d раздѣлитъ также числа a и b , (такъ какъ они суть кратныя числа k), т. е. будетъ *общимъ дѣлителемъ* *всѣхъ данныхъ чиселъ*.

Такимъ образомъ, каждый изъ дѣлителей чиселъ a, b, c, d , есть въ то-же время дѣлитель чиселъ k, c, d и наоборотъ, а потому

$$o . n . d . (a, b, c, d) = o . n . d . (k, c, d).$$

Повторяя то-же рассужденіе, придемъ къ заключенію, что если обозначить общій наибольшій дѣлитель чиселъ k и c буквой m , то

$$o . n . d . (k, c, d) = o . n . d . (m, d),$$

а слѣд. и $o . n . d . (a, b, c, d) = o . n . d . (m, d)$.

Отсюда можно вывести правило:

Чтобы найти общій наибольшій дѣлитель нѣсколькихъ чиселъ, ищемъ общій наибольшій дѣлитель двухъ первыхъ чиселъ; потомъ ищемъ общій наибольшій дѣлитель для полученнаго числа и третьяго изъ данныхъ чиселъ, потомъ общій наибольшій дѣлитель для вновь полученнаго и четвертаго числа и т. д., до тѣхъ поръ, пока не дойдемъ до послѣдняго числа. Послѣдній

*) Но разумѣется нельзя сказать такъ: чтобы число дѣлилось на 18 необходимо и достаточно, чтобы оно дѣлилось на 3 и на 6, такъ какъ 3 и 6 не суть числа взаимно-простыя.

изъ вычисленныхъ такимъ образомъ общаго наибольшаго дѣлителя и бѣгутъ покомьямъ *).

Передѣлимъ разность той подстановки, введенной, доказывавшей для общаго наибольшаго дѣлителя произвольныхъ чиселъ свойства, аналогичныя выведенныя въ §§ 62, 63, 64—65 свойствами общаго наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ.

Если общій наиб. дѣлитель несколькихъ чиселъ равенъ общему такому числу, называемому взаимно простыми въ ихъ совокупности, то не слѣдуетъ смѣшивать съ понятиемъ о числахъ взаимно простыхъ, (66)

Напр., числа 18, 21, 35 взаимно просты въ ихъ совокупности, но не попарно.

ГЛАВА III.

Теорія общаго наименьшаго кратнаго.

72. ОПРЕДѢЛЕНІЯ Число, дѣлящееся нацѣло на нѣсколько данныхъ чиселъ, называется общимъ кратнымъ этихъ чиселъ

Наименьшее изъ чиселъ, удовлетворяющихъ этому условію, называется общимъ наименьшимъ кратнымъ данныхъ чиселъ.

Для сокращенія письма условимся обозначать символомъ:

об. кр. (a, b)

всякое общее кратное данныхъ чиселъ a и b , и символомъ:

н. кр. (a, b)

общее наименьшее кратное тѣхъ-же чиселъ.

73. ТЕОРЕМА. Общее наименьшее кратное двухъ данныхъ чиселъ равно частному отъ раздѣленія произведенія этихъ чиселъ на ихъ общаго наибольшаго дѣлителя.

Дано: о. н. д. $(a, b) = d$.

Треб. док.: н. кр. $(a, b) = \left(\frac{a \cdot b}{d}\right) ?$

Пусть частныя отъ раздѣленія данныхъ чиселъ a и b на ихъ общаго наибольшаго дѣлителя d соответственно равны q_0 и q_1 , такъ что

$$a = d \cdot q_0; b = d \cdot q_1.$$

*), Можно еще сказать такъ. общій наибольшій дѣлитель n чиселъ равенъ общ. наиб. дѣлителю двухъ чиселъ: общаго наибольшаго дѣлителя $(n-1)$ изъ этихъ чиселъ и n -аго числа.

Всякое общее кратное чиселъ a и b , дѣлясь на a , должно непремѣнно заключаться въ ряду чиселъ, кратныхъ a , т. е. въ ряду:

$$1 \cdot a; 2 \cdot a; 3 \cdot a; 4 \cdot a; 5 \cdot a; \dots \dots m \cdot a; \dots \dots$$

Разсмотримъ, какъ должно быть выбрано m , чтобы произведение $m \cdot a$ дѣлилось нацѣло также и на b .

Дѣля $m \cdot a$, или, что одно и то-же, $m \cdot d \cdot q_a$ на b , или на $d \cdot q_b$, получаемъ на основаніи §§ 40 и 38:

$$(m \cdot d \cdot q_a) : (d \cdot q_b) = (m \cdot q_a) : q_b.$$

Но такъ какъ числа q_a и q_b суть числа взаимно-простыя (§ 67), то дѣленіе произведенія $m \cdot q_a$ на q_b можетъ быть выполнено нацѣло только въ томъ случаѣ, если m дѣлится на q_b (§ 68), т. е., если m имѣетъ видъ:

$$m = q_b \cdot k,$$

гдѣ k —произвольное цѣлое число.

Итакъ, для того, чтобы число вида $m \cdot a$, т. е. кратное a , дѣлилось въ то-же время и на b , необходимо и достаточно, чтобы m было кратнымъ q_b .

Такимъ образомъ, всякое общее кратное чиселъ a и b имѣетъ видъ:

$$m \cdot a = k \cdot q_b \cdot a, \text{ или}$$

$$k \cdot q_b \cdot q_a \cdot d, \tag{1}$$

гдѣ k произвольное цѣлое число. Наименьшее значеніе произведеніе $(k \cdot q_b \cdot q_a \cdot d)$ имѣетъ при $k = 1$, что даетъ величину наименьшаго общаго кратнаго чиселъ a и b въ видѣ:

$$\text{н. кр. } (a, b) = q_b \cdot q_a \cdot d. \tag{2}$$

Но $q_a \cdot d = a$; $q_b = \left(\frac{b}{d}\right)$, и слѣд. выраженіе (2) можетъ быть переписано такъ:

$$\text{н. кр. } (a, b) = \left(\frac{a \cdot b}{d}\right), \text{ что и тр. док.}$$

74. На практикѣ, для полученія наименьшаго кратнаго двухъ чиселъ, сначала находятъ ихъ общаго наибольшаго дѣлителя и затѣмъ раздѣливъ на него одно изъ данныхъ чиселъ, умножаютъ на полученное частное другое число.

Пусть, напр., даны два числа 420 и 792, общій наибольшій дѣлитель которыхъ равенъ 12.

Наименьшее кратное этихъ чиселъ равно:

$$420 \cdot \left(\frac{792}{12} \right) = 420 \cdot 66 = 27720.$$

75. Не трудно убѣдиться въ справедливости слѣдующихъ теоремъ:

Общее наименьшее кратное двухъ взаимно-простыхъ чиселъ равно ихъ произведенію *).

Если изъ двухъ данныхъ чиселъ одно дѣлится на другое, то ихъ наименьшее кратное равно большому изъ нихъ **).

76. ТЕОРЕМА. Всякое кратное данныхъ чиселъ есть кратное ихъ наименьшаго кратнаго.

Пусть M есть общее кратное данныхъ чиселъ a, b, c, d и m — *наименьшее* кратное тѣхъ же чиселъ. Допустимъ, что M не дѣлится нацѣло на m , и что остатокъ отъ этого дѣленія равенъ r . Тогда

$$M = m \cdot q + r.$$

Изъ этого равенства слѣдуетъ, что каждое изъ чиселъ a, b, c, d , дѣля по условію M и m , раздѣлится на основаніи § 44 и число r .

Такимъ образомъ, число r , меньшее чѣмъ m (§ 33), дѣлится на всѣ данныя числа a, b, c, d , т. е. является ихъ общимъ кратнымъ, что противорѣчитъ сдѣланному предположенію, что m есть *наименьшее* кратное данныхъ чиселъ.

Изъ этой теоремы слѣдуетъ, что для полученія *всѣхъ* общихъ кратныхъ для данныхъ чиселъ, достаточно найти ихъ *наименьшее* кратное и умножать его послѣдовательно на числа натурального ряда:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$$

77. ПРИМѢЧАНІЕ Последняя теорема выведена въ предыдущемъ параграфѣ для *общаго* случая, т. е. для общаго кратнаго сколькихъ угодно чиселъ. Та же теорема въ примѣненіи къ общему кратному *всѣхъ* чиселъ выводится еще проще. Въ самомъ дѣлѣ, изъ § 73 намъ известно, что всякое общее кратное чиселъ a и b имѣетъ видъ:

$$k \cdot d \cdot q_1 \cdot q_2,$$

*) Такъ какъ общій наиб. дѣлитель въ этомъ случаѣ равенъ 1.

***) Такъ какъ общій наиб. дѣлитель въ этомъ случаѣ равенъ меньшему числу.

а наименьшее кратное тѣхъ-же чиселъ равно:

$$d \cdot q_a \cdot q_b,$$

откуда непосредственно слѣдуетъ то, что треб. доказать.

78. ТЕОРЕМА. При дѣленіи наименьшаго кратнаго двухъ чиселъ на каждое изъ нихъ, въ частномъ получаются число взаимно-простыя.

Дано: н. кр. $(a, b) = m$.

Треб. док.: $\left(\frac{m}{a}\right)$ и $\left(\frac{m}{b}\right)$ суть числа взаимно-простыя?

Въ самомъ дѣлѣ, мы знаемъ, что наименьшее кратное чиселъ a и b имѣетъ видъ (§ 73):

$$d \cdot q_a \cdot q_b.$$

Раздѣливъ это число на a , равное $d \cdot q_a$, получаемъ частное q_b ; раздѣливъ же на b , находимъ частное q_a . Но числа q_a и q_b — взаимно-простыя, какъ частныя отъ дѣленія a и b на ихъ общаго наибольшаго дѣлителя (§ 67), что и доказываетъ предложенную теорему.

79. ЗАМѢЧАНІЕ *). Нетрудно доказать послѣднюю теорему и для болѣе общаго случая, т. е. для наименьшаго кратнаго не двухъ, а сколькихъ угодно чиселъ.

Пусть общ. наим. кратное чиселъ $(a, b, c, d) = m$, и частныя отъ дѣленія m на данныя числа соответственно равны:

$$q_a, q_b, q_c, q_d.$$

такъ что

$$m = a \cdot q_a; m = b \cdot q_b; m = c \cdot q_c; m = d \cdot q_d. \quad (1)$$

Если допустить, что общій наибольшій дѣлитель чиселъ q_a, q_b, q_c, q_d есть не единица, а какое-нибудь число k , то, дѣля каждое изъ равенствъ (1) на k , увидимъ, что m должно дѣлиться

нацѣло на k , и что число $\left(\frac{m}{k}\right)$, удовлетворяющее равенствамъ:

$$\left(\frac{m}{k}\right) = a \cdot \left(\frac{q_a}{k}\right); \left(\frac{m}{k}\right) = b \cdot \left(\frac{q_b}{k}\right); \left(\frac{m}{k}\right) = c \cdot \left(\frac{q_c}{k}\right); \left(\frac{m}{k}\right) = d \cdot \left(\frac{q_d}{k}\right),$$

есть общее кратное чиселъ a, b, c, d , а это противорѣчитъ сдѣланному предположенію, что m есть наименьшее кратное данныхъ чиселъ.

*) Необходимо для Горнаго Института.

80. ТЕОРЕМА, ОБРАТНАЯ ПРЕДЫДУЩЕЙ. Если частныя отъ дѣленія общаго кратнаго данныхъ чиселъ на каждое изъ нихъ суть числа взаимно-простыя, то это общее кратное есть наименьшее.

Дано: M есть общее кратное чиселъ a и b ; $\left(\frac{M}{a}\right)$ и $\left(\frac{M}{b}\right)$ суть числа взаимно-простыя.

Треб. док.: M есть наименьшее кратное чиселъ a и b ?

Въ самомъ дѣлѣ, всякое общее кратное чиселъ a и b имѣетъ видъ (§ 78)

$$M = k \cdot d \cdot q_a \cdot q_b.$$

Дѣля это число на a и на b , получаемъ соотвѣтственно:

$$k \cdot q_b \text{ и } k \cdot q_a.$$

Общій наибольшій дѣлитель этихъ чиселъ есть k ; по условию же числа эти взаимно-простыя, что возможно только тогда, если $k = 1$; но тогда $M = d \cdot q_a \cdot q_b$, а это и есть формула для *наименьшаго* общаго кратнаго чиселъ a и b .

Итакъ, $M = \text{наим. кр. } (a, b)$, что и тр. док.

81. ЗАМѢЧАНІЕ *). Докажемъ эту-же теорему для общаго кратнаго *сколькихъ угодно чиселъ*.

Пусть M есть какое-нибудь общее кратное чиселъ a, b, c, d , и пусть частныя отъ дѣленія M на данныя числа соотвѣтственно равны q_a, q_b, q_c, q_d , причемъ общій наибольшій дѣлитель этихъ чиселъ (q_a, q_b, q_c, q_d) по условию равенъ единицѣ.

Допустимъ, что не M , а какое-нибудь другое число, напр m , есть *наименьшее* кратное чиселъ a, b, c, d . Тогда на основаніи § 76 заключаемъ, что $M = k \cdot m$, гдѣ k означаетъ нѣкоторое цѣлое число.

Итакъ, имѣемъ равенства:

$$k \cdot m = a \cdot q_a; k \cdot m = b \cdot q_b; k \cdot m = c \cdot q_c; k \cdot m = d \cdot q_d, \quad (1)$$

откуда получаемъ:

$$q_a = k \cdot \left(\frac{m}{a}\right); q_b = k \cdot \left(\frac{m}{b}\right); q_c = k \cdot \left(\frac{m}{c}\right), q_d = k \cdot \left(\frac{m}{d}\right). \quad (2)$$

Такъ какъ число m , какъ предполагаемое наименьшее кратное чиселъ a, b, c, d , дѣлится на каждое изъ нихъ, то изъ равенствъ ряда (2) слѣдуетъ, что числа q_a, q_b, q_c, q_d имѣютъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ число k , а это противорѣчитъ условию теоремы. Итакъ, равенства эти возможны только при $k = 1$,

*) Необходимо для Горнаго Института.

но тогда $M = m$, т. е. M есть действительно *наименьшее* кратное данныхъ чиселъ, что и тр. док.

81 Bis. ЗАМѢЧАНІЕ *). Послѣ доказательства теоремъ §§ 79 и 81 можно дать другое, болѣе простое доказательство теоремы § 78: **).

Чтобы получить общее *наименьшее* кратное двухъ чиселъ a и b , достаточно произведемъ изъ $a \cdot b$ разложить на изъ общаго наибольшаго дѣлителя d .

Въ самомъ дѣлѣ, замѣтимъ прежде всего, что выраженіе $\left(\frac{ab}{d}\right)$ есть число несомнѣнно цѣлое, ибо какъ a , такъ и b дѣлятся на d .

Очевидно, что это число $\left(\frac{ab}{d}\right)$ есть *общее* кратное чиселъ a и b , такъ какъ при дѣленіи на a оно даетъ въ частномъ цѣлое число $\left(\frac{b}{d}\right)$, а при дѣленіи на b въ частномъ получается тоже цѣлое число $\left(\frac{a}{d}\right)$.

Кромѣ того, замѣчаемъ, что эти частныя $\frac{b}{d}$ и $\frac{a}{d}$ суть числа взаимно-простыя, такъ какъ они представляютъ результаты раздѣленія чиселъ a и b на ихъ общ. наиб. дѣлителя (См. § 67).

Слѣдовательно, по теоремѣ § 80 заключаемъ, что число $\frac{ab}{d}$ есть не только *общее*, но и *наименьшее* кратное чиселъ a и b , что и тр. док.

82 Нахожденіе общаго наименьшаго кратнаго чиселъныхъ данныхъ чиселъ.

Пусть требуется найти общее *наименьшее* кратное чиселъ a, b, c, d . Назовемъ его буквой M .

Пусть n кр. $(a, b) = m$.

Всякое число, дѣлящееся на числа c, d и m , будетъ, очевидно, дѣлиться и на числа a, d, a, b ***).

*) Необходимо для Горнаго Института.

**) Слѣдуетъ замѣтить, что теоремы §§ 79 и 81 доказаны совершенно самостоятельно, *независимо* отъ теоремы § 73.

***) Ибо число, дѣлящееся на кратное двухъ чиселъ, дѣлится и на каждое изъ нихъ (§ 46).

Наоборотъ, всякое число, дѣлящееся на a, b, c, d , будетъ дѣлиться и на m, a, d *).

Изъ этого слѣдуетъ, что нахождение наименьшаго кратнаго четырехъ чиселъ сводится къ нахождению наименьшаго кратнаго трехъ чиселъ: двухъ данныхъ чиселъ (c и d) и взаимнаго кратнаго m двухъ другихъ данныхъ (a и b).

Пусть наименьшее кратное чиселъ m и c равно k ; тогда, повторяя рассужденія аналогичныя вышеприведеннымъ, увидимъ, что искомое наименьшее кратное чиселъ a, b, c, d будетъ

$$M = n. \text{кр. } (k, d).$$

И вообще:

*Чтобы получить общее наименьшее кратное несколькихъ чиселъ, ищутъ сперва наименьшее кратное какому-нибудь числу изъ нихъ, потомъ наим. кратное для полученнаго числа и третьяго изъ данныхъ и т. д., пока не будутъ влиты все оставшяя числа. Получится общее наименьшее кратное, полученное такимъ образомъ, и будетъ искомымъ **).*

ГЛАВА IV.

Теорія абсолютно-простыхъ чиселъ.

83 ОПРЕДѢЛЕНІЕ. Цѣлое число, не имѣющее другихъ дѣлителей, кромѣ единицы и самого себя, называется числомъ абсолютно-простымъ (или первоначальнымъ).

Напр., числа 7, 19, 31, 37 — числа абс.-простыя; число же 25 не есть абс.-простое, такъ какъ оно дѣлится на 5.

84. ТЕОРЕМА. Всякое абсолютно-простое число есть число взаимно-простое со всѣми числами, которыя не суть его кратныя.

Въ самомъ дѣлѣ, всякое простое число n не имѣетъ другихъ дѣлителей, кромѣ единицы и n , поэтому всякое другое число, не дѣлящееся на n , имѣетъ съ нимъ только одного общаго дѣлителя — единицу, а слѣд., эти числа суть взаимно-простыя.

85. ТЕОРЕМА. Всякое число имѣетъ по крайней мѣрѣ одного абс.-простого дѣлителя, отличнаго отъ единицы.

Въ самомъ дѣлѣ, если N есть число абс.-простое, то оно имѣетъ одного простого дѣлителя, равнаго самому себѣ.

*. Ибо число, дѣлящееся на a и b есть ихъ общее кратное, а потому (§ 76) оно раздѣлится и на ихъ наименьшее кратное.

**.) Можно еще сказать такъ: общее наименьшее кратное n данныхъ чиселъ равно общему наименьшему кратному двухъ чиселъ, наименьшаго критерію какому-нибудь $(n-1)$ изъ данныхъ чиселъ и n или еще

Если-же N не есть число абс.-простое, то оно имѣеть одного или нѣсколькихъ дѣлителей, отличныхъ отъ единицы. Пусть *наименьшій* изъ дѣлителей числа N равенъ a .

Нетрудно показать, что a есть число непременно абс.-простое. Въ самомъ дѣлѣ, если a не есть число простое, то оно имѣеть хоть одного какого-нибудь дѣлителя, кромѣ единицы, напр. b . Тогда по теоремѣ § 46 выходитъ, что и число N должно дѣлиться на b , т. е., что число N имѣеть дѣлителя, *меньшаго чѣмъ* a , что противорѣчить условію, что a есть *наименьшій* дѣлитель числа N .

86. ТЕОРЕМА. Всякія два не взаимно-простыя числа имѣють по крайней мѣрѣ одного **ОБЩАГО** простого дѣлителя.

Въ самомъ дѣлѣ, если числа a и b не суть числа взаимно-простыя, то они имѣють общимъ наибольшимъ дѣлителемъ какое-нибудь цѣлое число, напр. d , неравное единицѣ. Но число d , по только что доказанной теоремѣ (§ 85), имѣеть по крайней мѣрѣ одного простого дѣлителя, который (§ 46) будетъ дѣлить также числа a и b , т. е. и будетъ ихъ *общимъ простымъ дѣлителемъ*.

87. ТЕОРЕМА. Рядъ абсолютно-простыхъ чиселъ безграниченъ.

Для доказательства этой теоремы достаточно показать, что какъ-бы ни было велико какое-нибудь абс.-простое число, напр., N , всегда существуетъ другое простое число, *большее чѣмъ* N .

Составимъ для этого произведеніе изъ *всѣхъ простыхъ чиселъ* отъ единицы до N включительно, не пропуская ни одного изъ нихъ, и прибавимъ къ этому произведенію единицу. Полученное такимъ образомъ число назовемъ буквой S .

Итакъ:

$$S = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot \dots \cdot N + 1.$$

Если S есть число абс.-простое, то теорема доказана, такъ какъ S больше N .

Если-же S не есть число простое, то *наименьшій* дѣлитель его, отличный отъ единицы, долженъ быть непременно числомъ *простымъ* (§ 85).

Но этимъ дѣлителемъ не можетъ быть ни одно изъ *простыхъ чиселъ*

$$2, 3, 5, 7, 11, \dots, N,$$

закрывающихся въ ряду отъ 2 до N , такъ какъ, допустивши противное, т. е., что одно изъ этихъ чиселъ, напр. a , дѣлитъ N , придемъ къ абсурду: въ самомъ дѣлѣ, если число S , равное

суммѣ двухъ слагаемыхъ, дѣлится на a , и первое изъ слагаемыхъ ($1 \cdot 2 \cdot 3 \dots N$), содержа a множителемъ, тоже дѣлится на a , то и второе слагаемое, т. е. единица, должно дѣлится на a (§ 44).

Итакъ, простой дѣлитель числа S не заключается въ ряду простыхъ чиселъ отъ 1 до N , т. е. онъ больше каждаго изъ чиселъ этого ряда, а потому онъ непремѣнно больше N , что и доказываетъ теорему.

Примѣчаніе. Не слѣдуетъ думать, что число S , составленное, какъ указано выше, будетъ непремѣнно числомъ абсолютнымъ. Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ:

$$1 \cdot 2 + 1 = 3 \text{—число абс.-простое.}$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 = 7 \text{—число абс.-простое.}$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31 \text{—число абс.-простое.}$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211 \text{—число абс.-простое.}$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 = 2311 \text{—число абс.-простое.}$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 \text{—число непростое—} \\ = 59 \cdot 509$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 + 1 = 510511 \text{—число непростое—} \\ = 19 \cdot 97 \cdot 277. \text{ И т. д.}$$

88. ТЕОРЕМА. Если абсолютно-простое число дѣлится произведеніе нѣсколькихъ сомножителей, то оно дѣлится, по крайней мѣрѣ, одного изъ нихъ.

Докажемъ эту теорему сначала для произведенія изъ двухъ множителей, а потомъ обобщимъ ее для произвольнаго числа ихъ.

Пусть абс.-простое число n дѣлится произведение ($a \cdot b$)

Если n дѣлится a , то теорема доказана, если же n не дѣлится a , то на основаніи § 84 заключаемъ, что n и a суть числа взаимно-простыя, а потому непремѣнно число b дѣлится на n (§ 68). Итакъ, n должно дѣлится или то, или другое число, хотя можетъ дѣлится и оба числа совмѣстно.

Пусть теперь абс.-простое число n дѣлится произведеніе ($a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e$). На основаніи § 25 произведение $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e$ представить въ видѣ $a \cdot (b \cdot c \cdot d \cdot e)$, т. е. разсматривать, какъ произведение двухъ множителей a и $(b \cdot c \cdot d \cdot e)$. Если n дѣлится a , то теорема доказана, если же n не дѣлится a , то второй множитель, т. е. $b \cdot c \cdot d \cdot e$, долженъ дѣлится на n по предыдущему. Разсматриваемъ $b \cdot c \cdot d \cdot e$, опять какъ произведение двухъ множителей: $b \cdot (c \cdot d \cdot e)$. Если n дѣлится b , то теорема доказана, въ

противномъ же случаѣ второй множитель, т. е. $(c \cdot d \cdot e)$ долженъ дѣлиться на n . Разсматривая $c \cdot d \cdot e$ опять, какъ произведение двухъ множителей $c \cdot (d \cdot e)$. . . и т. д., придемъ къ заключенію, что непременно по крайней мѣрѣ одно изъ чиселъ a, b, c, d, e должно раздѣлиться на n , что и тр. док.

89. СЛѢДСТВІЕ. Если абс.-простое число дѣлится произведение абс.-простыхъ множителей, то оно равно одному изъ нихъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если простое число дѣлится произведение, то по предыдущей теоремѣ (§ 88) оно должно дѣлить одного изъ множителей этого произведенія; но каждый изъ этихъ множителей по условію есть число абсолютно-простое, а слѣд., онъ можетъ раздѣлиться, кромѣ единицы, только на самого себя.

90. ТЕОРЕМА Если всѣ множители одного произведенія суть числа попарно взаимно-простыя со всѣми множителями другого произведенія, то и произведенія эти тоже суть числа взаимно-простыя.

Пусть a, b, c, d, m суть числа попарно взаимно-простыя съ числами $\alpha, \beta, \gamma, \mu$.

Требуется доказать:

$$P = a \cdot b \cdot c \cdot m$$

есть число взаимно-простое съ

$$Q = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \mu?$$

Допустимъ противное, т. е., что P и Q не суть числа взаимно-простыя. Тогда по теоремѣ § 88 заключаемъ, что P и Q имѣютъ по крайней мѣрѣ одного *общаго* абс.-простого дѣлителя, напр. n . Если произведение $a \cdot b \cdot c \cdot m$ дѣлится на простого дѣлителя n , то по § 88 по крайней мѣрѣ одинъ изъ множителей дѣлится на n ; пусть, напр., это будетъ множитель a .

Также въ произведеніи $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \mu$ одинъ изъ множителей, напр., β , долженъ дѣлиться на n . Слѣдовательно, оказывается, что числа a и β , имѣя общаго дѣлителя n , не суть числа взаимно-простыя, что противорѣчитъ условію.

91. СЛѢДСТВІЕ. Всякія степени взаимно-простыхъ чиселъ суть также числа взаимно-простыя.

Дано: a вз.-прост. съ b .

Треб. док.: a^m вз.-прост. съ b^n ?

Въ самомъ дѣлѣ, $a^m = a \cdot a \cdot a$; $b^n = b \cdot b \cdot b$, т. е.

каждое из чисел a^m и b^n может быть представлено в видѣ произведенія, причемъ всѣ множители одного произведенія суть числа взаимно-простыя съ множителями другого произведенія, а потому на основаніи предыдущей теоремы заключаемъ, что и произведенія, т. е. a^m и b^n суть числа взаимно-простыя, что и тр. док.

92. ТЕОРЕМА. Всякое число можетъ быть разложено на простыхъ сомножителей, и притомъ только единственнымъ образомъ.

Доказательство этой теоремы состоитъ изъ двухъ частей:

1°. Докажемъ, что всякое число можетъ быть разложено на простыхъ множителей *).

2°. Докажемъ, что разложеніе это можетъ быть произведено только единственнымъ способомъ.

1°. Пусть будетъ N какое нибудь непростое***) число.

На основаніи § 85 мы знаемъ, что наименьшій дѣлитель числа N есть число абс.-простое; пусть это будетъ, напр., a . Слѣдовательно, имѣемъ:

$$N = a \cdot q. \quad (1)$$

Если частное q окажется тоже простымъ числомъ, то теорема доказана, такъ какъ N уже представлено вѣ видѣ произведенія двухъ простыхъ чиселъ. Если же q число непростое, то наименьшій дѣлитель его, напр., b , есть число простое. Пусть

$$q = b \cdot q_1.$$

Подставляя это значеніе вѣ равенство (1), получаемъ:

$$N = a \cdot (b \cdot q_1) = a \cdot b \cdot q_1. \quad (2)$$

Если q_1 есть число простое, то теорема доказана, если-же q_1 не есть число простое, то

$$q_1 = c \cdot q_2,$$

гдѣ c число простое; подставляя это значеніе вѣ равенство (2), найдемъ:

$$N = a \cdot b \cdot c \cdot q_2.$$

Продолжая подобное-же разсужденіе, непремѣнно получимъ

*) Иначе говоря, всякое непростое число равно произведенію простыхъ множителей.

**) Для простыхъ чиселъ теорема эта не требуетъ доказательства, такъ какъ, если N есть число простое, то оно равно произведенію двухъ простыхъ множителей: $1 \cdot N$.

одно изъ частныхъ q , напр. q_n , абсолютно-простымъ *), и тогда число N представится въ видѣ произведенія простыхъ множителей:

$$N = a . b . c . d n . q_n$$

2^о. Допустимъ, что какимъ-нибудь образомъ намъ удалось разложить число N на простыхъ множителей двумя различными способами; пусть, напр.

$$N = a . b . c . d . e n \quad (1)$$

и то-же самое число

$$N = a_1 . b_1 . c_1 . d_1 n_1 . p . q . r . \quad (2)$$

Изъ разложенія (1) мы видимъ что N дѣлится на простое число a ; слѣд., и произведеніе $a_1 . b_1 r$, равное этому же числу N , тоже должно дѣлиться на a .

Но всѣ множители этого произведенія суть числа абсолютно-простыя, а потому, если произведеніе это дѣлится на простого дѣлителя a , то одинъ изъ множителей его (§ 89) долженъ быть равенъ a . Пусть, напр., $a_1 = a$.

Число N можетъ быть теперь представлено въ двухъ видахъ:

$$N = a . (b . c . d n)$$

$$N = a_1 . (b_1 . c_1 . d_1 n_1 . p . q . r),$$

откуда слѣдуетъ, что произведенія

$$N_1 = b . c . d n \quad (3)$$

$$N_1 = b_1 . c_1 . d_1 n_1 . p . q . r \quad (4)$$

должны быть равны.

Изъ равенства (3) видимъ, что N_1 дѣлится на простое число b ; слѣд., и произведеніе простыхъ чиселъ (4), т. е.

$$b_1 . c_1 . d_1 r$$

должно дѣлиться на b , т. е. одинъ изъ множителей этого произведенія, напр. b_1 , долженъ быть равенъ b (§ 89).

Переписывая теперь равенства (1) и (2) такъ:

$$N = a . b . (c . d . e n)$$

$$N = a_1 . b_1 . c_1 . d_1 . e_1 n_1 . p . q . r).$$

*) Числа q, q_1, q_2, q_3 суть уменьшающаяся цѣлая числа, и слѣд., если бы ни одно изъ нихъ не было абс.-простымъ, то оказалось-бы, что убывающія числа образуютъ безпределный рядъ чиселъ, что, очевидно, невозможно.

видимъ, что числа

$$N_2 = c \cdot d \cdot e \cdot \dots \cdot n \quad (5)$$

$$N_2 = c_1 \cdot d_1 \cdot e_1 \cdot \dots \cdot n_1 \cdot p \cdot q \cdot r \quad (6)$$

должны быть равны, откуда, при помощи рассуждений, подобныхъ вышеприведеннымъ, увидимъ, что одинъ изъ множителей произведенія (6) долженъ быть равнымъ c и т. д.

Продолжая достаточно долго такія-же рассужденія, придемъ къ заключенію, что для каждаго изъ множителей a, b, c, d, \dots, n произведенія (1) найдется соотвѣтственно равный множитель въ произведеніи (2). Пусть, напр.

$$a = a_1; b = b_1; c = c_1; d = d_1; \dots n = n_1.$$

Переписываемъ теперь равенства (1) и (2) такъ:

$$N = (a \cdot b \cdot c \cdot \dots \cdot n) \cdot 1$$

$$N = (a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 \cdot \dots \cdot n_1) \cdot p \cdot q \cdot r.$$

Отсюда видно, что произведеніе

$$p \cdot q \cdot r = 1,$$

что возможно только въ томъ случаѣ, если порознь каждый изъ множителей равенъ единицѣ, т. е., если

$$p = 1; q = 1; r = 1.$$

Итакъ, обѣ формы разложенія числа N тождественны, т. е. число можетъ быть разложено на первоначальныхъ множителей только *единственнымъ* способомъ, что и тр. док.

ГЛАВА V.

О дѣлимости чиселъ, представленныхъ въ видѣ произведенія простыхъ множителей.

93. ТЕОРЕМА. Для того, чтобы одно число дѣлилось на другое, необходимо и достаточно, чтобы каждый изъ простыхъ множителей дѣлителя входилъ въ дѣлимое, съ показателемъ, не меньшимъ того, который онъ имѣетъ въ дѣлителѣ.

Во-первыхъ, это условіе *необходимо*. Въ самомъ дѣлѣ, пусть a дѣлится нацѣло на b , такъ что

$$a = b \cdot q. \quad (1)$$

Разложимъ каждое изъ чиселъ a , b и q на простыхъ множителей. Такъ какъ числа a , и $(b \cdot q)$ равны между собой, то простые множители, находящiеся въ лѣвой и правой частяхъ равенства (1), должны быть тождественны; иначе оказалось-бы, что одно и то-же число можетъ быть разложено двумя различными способами на первоначальныхъ множителей, что невозможно (§ 92). Итакъ, число a состоитъ изъ произведенiя всѣхъ простыхъ множителей, входящихъ и въ дѣлителя, и въ частное, а потому ясно, что каждый изъ множителей дѣлителя входитъ и въ дѣлимое съ показателемъ степени во всякомъ случаѣ *не меншимъ*, чѣмъ въ дѣлителѣ.

Во-вторыхъ, это условiе *достаточно*, потому что, если оно выполнено, то дѣлимое можно разложить на двѣ части, изъ которыхъ одна будетъ произведенiемъ всѣхъ простыхъ множителей, входящихъ въ дѣлитель, а другая, будучи произведенiемъ всѣхъ остальныхъ простыхъ множителей дѣлимаго, выразитъ собой *частное* отъ дѣленiя; но такъ какъ всѣ эти простые множители суть числа цѣлыя, то и частное выразится тоже числомъ *цѣлымъ*, т. е. дѣленiе выполнится *непрѣмѣнно нацѣло*, что и тр. док.

94. ТЕОРЕМА. Общiй наибольшiй дѣлитель двухъ или нѣсколькихъ чиселъ равенъ произведенiю изъ простыхъ множителей, общихъ всѣмъ даннымъ числамъ, причемъ каждый изъ этихъ простыхъ множителей надо взять съ наименьшимъ изъ показателей, съ которыми онъ входитъ въ данныя числа.

Въ самомъ дѣлѣ, на основанiи только что выведеннаго условiя дѣлимости одного числа на другое (§ 93) можно сказать, что *всякiй* общiй дѣлитель данныхъ чиселъ не можетъ заключать въ себѣ простого множителя, не входящаго хоть въ одно изъ этихъ чиселъ, и также не можетъ имѣть простого множителя съ показателемъ, бѣльшимъ, чѣмъ показатель при немъ же въ любомъ изъ данныхъ чиселъ, а потому ясно, что общiй *наибольшiй* дѣлитель долженъ быть равенъ произведенiю *всѣхъ* простыхъ множителей, *общихъ* даннымъ числамъ, причемъ каждый изъ этихъ множителей долженъ быть взятъ съ *наименьшимъ* его показателемъ.

Примѣръ. Положимъ, даны 4 числа:

$$6040 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7;$$

$$800 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^2;$$

$$960 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5;$$

$$3960 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$$

Очевидно, что **всякій** *общій дѣлитель* этихъ чиселъ не можетъ содержать въ себѣ другихъ множителей кромѣ 2, 3 и 5, причемъ наибольшіе возможные показатели степени при этихъ множителяхъ соотвѣтственно суть 3 (при 2), 1 (при 3) и 1 (при 5); поэтому, *общій наибольшій дѣлитель* этихъ чиселъ равенъ:

$$2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120.$$

95. ТЕОРЕМА. *Общее наименьшее кратное двухъ или нѣсколькихъ чиселъ равно произведенію всѣхъ простыхъ множителей, входящихъ въ данныя числа, причемъ каждый изъ этихъ множителей надо взять съ наибольшимъ изъ всѣхъ показателей, съ какими онъ входитъ въ данныя числа.*

Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи выведеннаго выше условія дѣлимости одного числа на другое (§ 93), можно сказать, что *всякое* общее кратное данныхъ чиселъ должно содержать *всѣ* простые множители, входящіе въ эти числа, съ показателями *или равными, или болѣе, чѣмъ* показатели при этихъ множителяхъ въ данныхъ числахъ, а потому *наименьшее* кратное должно быть равно произведенію *всѣхъ* простыхъ множителей съ показателями, *равными* наибольшимъ изъ тѣхъ показателей, съ какими они входятъ въ эти числа.

Примѣръ. Положимъ, даны тѣ-же 4 числа:

$$5040 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7;$$

$$600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2;$$

$$960 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5;$$

$$3960 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11.$$

Очевидно, что *всякое* общее кратное этихъ чиселъ должно содержать простыхъ множителей

2, 3, 5, 7, 11

съ показателями степеней соотвѣтственно *не меньшими*, чѣмъ 6 (при 2); 2 (при 3); 2 (при 5), 1 (при 7) и 1 (при 11), а потому *наименьшее* общее кратное этихъ чиселъ равно

$$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 = 1108800.$$

ОТДѢЛЪ Ш.

Дроби.

ГЛАВА I.

Основные свойства дробей.

96. ОПРЕДѢЛЕНІЯ. Дробью называется соединеніе нѣсколькихъ равныхъ частей какой-нибудь величины.

Число, показывающее, на сколько равныхъ частей данная величина раздѣлена, называется *знаменателемъ* дроби; число, показывающее, сколько такихъ частей взято для образованія дроби, называется ея *числителемъ*.

Напр., дробь $\frac{9}{11}$ показываетъ, что единица разбита на одиннадцать равныхъ частей, причемъ для образованія дроби взято такихъ частей девять.

Читаютъ дробь такъ: выговариваютъ сперва числителя, потомъ знаменателя, измѣняя окончаніе послѣдняго слова.

Можно также прочесть дробь и иначе: сперва выговариваютъ числителя, а потомъ, прибавивъ слова — *дѣльное на*, — знаменателя.

Напр., дробь

$$\frac{127}{3263}$$

можно прочесть или такъ:

это двадцать семь три тысячи двѣсти шестьдесятъ третьихъ,

или такъ:

это двадцать семь, дѣльное на три тысячи двѣсти шестьдесятъ три.

97. Изъ опредѣленія понятія о дробѣ слѣдуетъ:

1. Если числитель дроби меньше знаменателя, то дробь меньше единицы. Такая дробь называется *правильной дробью*.
2. Если числитель дроби равенъ ея знаменателю, то такая дробь равна единицы.
3. Если числитель больше знаменателя, то величина дроби—больше единицы. Такая дробь называется *неправильной*.

98. ТЕОРЕМА. Если числитель дроби умножить (раздѣлить) на цѣлое число, то величина дроби умножится (раздѣлится) на то-же число.

Сравнимъ, напр., дроби:

$$(1) \dots \frac{a}{b} \text{ и } (2) \dots \frac{a \cdot m}{b}$$

Такъ какъ знаменатель и той и другой дроби равенъ b , то слѣд., число частей, на которыя раздѣлена единица для образованія дробей, а потому и величина каждой части—одинаковы. Но въ дробѣ (2) такихъ частей въ m разъ больше чѣмъ въ (1), а потому и вся эта дробь больше въ m разъ, т. е., она равна первой дроби, увеличенной въ m разъ, что и тр. док.

Также сравненіе дробей *)

$$\frac{a}{b} \text{ и } \frac{(a : m)}{b}$$

показываетъ, что вторая дробь меньше первой въ m разъ, такъ какъ число равныхъ частей, участвующихъ въ образованія этой дроби въ m разъ меньше, чѣмъ въ первой, величина же каждой части въ обоихъ случаяхъ одинакова.

99. ТЕОРЕМА. Если знаменатель дроби умножить (раздѣлить) на цѣлое число, то величина дроби раздѣлится (умножится) на то-же число.

Въ самомъ дѣлѣ, сравнивъ, напр., дроби:

$$(1) \dots \frac{a}{b} \text{ и } (2) \dots \frac{a}{b \cdot m}$$

видимъ, что число частей, участвующихъ въ образованія первой и второй дроби, одинаково; величина же каждой части во второй дроби въ m разъ меньше, чѣмъ въ первой (такъ какъ число такихъ

*) Предполагая, что a дѣлится нацѣло на m .

частей въ m разъ больше), а потому вторая дробь въ m разъ меньше первой, т. е. равна первой дроби, раздѣленной на m , что и тр. док.

Подобнымъ же образомъ изъ сравненія дробей *)

$$\frac{a}{b} \text{ и } \frac{a}{(b:m)}$$

нетрудно убѣдиться, что вторая дробь въ m разъ больше первой, т. е. равна первой, умноженной на m , что и тр. док.

100. ТЕОРЕМА. Если числитель и знаменатель дроби одновременно умножить (раздѣлить) на одно и то-же число, то величина дроби не измѣнится.

Теорема эта представляетъ прямое слѣдствіе двухъ предыдущихъ. Въ самомъ дѣлѣ, если, напр., числитель умножить на какое нибудь число, то величина дроби *умножится* на то-же число, если-же и знаменатель умножить на это-же число, то величина дроби на него же *раздѣлится*; очевидно, что одновременно увеличивая и уменьшая дробь въ одинаковое число разъ, мы оставляемъ величину ея безъ перемѣны.

То-же произойдетъ, повятно, и тогда, если числитель и знаменатель *раздѣлимъ* на одно и то-же число.

101. На предыдущей теоремѣ основано очень важное свойство дробей: *сократимость ихъ*.

Такъ какъ величина дроби не измѣняется отъ раздѣленія обоихъ членовъ ея на одно и то-же число, то, если числитель и знаменатель дроби имѣютъ какого-нибудь общаго дѣлителя, можно раздѣлить на этого дѣлителя оба члена дроби, и полученная такимъ образомъ дробь съ *меньшими* членами, т. е. *болѣе удобная для вычисленій*, будетъ равна данной.

Напр., раздѣливъ оба члена дроби $\frac{6}{9}$ на 3, получимъ новую дробь $\frac{2}{3}$, равную данной.

102. Если дана дробь $\frac{a}{b}$, числитель и знаменатель которой не суть числа взаимно-простыя, то, найдя общій наибольшій

*) Предполагая, что b дѣлится нацѣло на m .

шій дѣлитель чиселъ a и b , и раздѣливъ на него оба члена дроби, получимъ новую дробь, равную данной, но уже несократимую.

Итакъ, несократимой дробью называется такая дробь, числитель и знаменатель которой суть числа взаимно-простыя.

Привести дробь къ простѣйшему виду значитъ: найти общій наибольшій дѣлитель числителя и знаменателя дроби, и раздѣленіемъ обоихъ членовъ ея на ихъ общаго наибольшаго дѣлителя сдѣлать дробь несократимой.

Дробь называется неприводимой, если она не можетъ быть выражена другою дробью, равной данной, но съ меньшими членами.

103. ТЕОРЕМА. Если несократимая дробь равна некоторой другой дроби, то оба члена послѣдней дроби суть числа равнократныя *) обоихъ членовъ данной.

Пусть, напр., $\frac{a}{b}$ есть несократимая дробь и пусть

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Умножая обѣ части этого равенства на d , получимъ:

$$c = \frac{a \cdot d}{b} \dots \dots (1)$$

Такъ какъ c есть число цѣлое, то произведение $(a \cdot d)$ должно нацѣло дѣлиться на b ; но a —вз.—простое съ b по условию (ибо дробь $\frac{a}{b}$ несократима), слѣд., d дѣлится (§ 68) на b . Пусть, напр.,

$$d = b \cdot m.$$

Подставляя это значеніе въ равенство (1), получаемъ:

$$c = \frac{a \cdot b \cdot m}{b} = a \cdot m.$$

*) Числа A и B называются равнократными относительно чиселъ a и b , если частныя отъ раздѣленія A на a и B на b равны между собой, т. е. если $\left(\frac{A}{a}\right) = \left(\frac{B}{b}\right)$, такъ какъ въ этомъ случаѣ A содержитъ a столько же разъ, сколько B содержитъ b .

Итакъ, если $d = b \cdot m$, то $c = a \cdot m$, т. е., частныя отъ дѣленія d на b и c на a равны между собой, а потому c и d , члены второй дроби, суть числа равнократныя a и b , членовъ первой дроби, что и тр. док.

104. На основаніи послѣдней теоремы можно утверждать, что *всякая несократимая дробь есть въ то-же время дробь неприводимая*, такъ какъ, если она равна нѣкоторой другой дроби, то члены послѣдней суть числа, большія членовъ данной *).

105. Изъ теоремы § 103 вытекаютъ слѣдствія:

1. Для полученія всѣхъ дробей, равныхъ данной дроби, достаточно сдѣлать эту дробь несократимой и умножить оба ея члена послѣдовательно на числа натурального ряда:

$$1, 2, 3, 4, 5 \dots$$

2. Если двѣ несократимыя дроби равны, то они тождественны, т. е. ихъ числители и знаменатели порознь равны между собой.

106. Отъ прибавленія къ числителю и знаменателю дроби одного и того-же числа, дробь всегда приближается къ единицѣ, т. е. правильная дробь увеличивается, неправильная—уменьшается.

Отъ вычитанія изъ числителя и знаменателя дроби одного и того-же числа, дробь всегда отдаляется отъ единицы, т. е. правильная дробь уменьшается, а неправильная увеличивается.

Дана, напр., дробь $\frac{a}{b}$; прибавивъ къ обоимъ членамъ ея по c , получимъ дробь $\frac{a+c}{b+c}$. Сравнимъ величины этихъ дробей.

Если оба члена первой дроби умножить на $(b+c)$, а второй—на b , то величина каждой изъ дробей не измѣнится (§ 100), но знаменатели ихъ сдѣлаются равными другъ другу:

$$(1) \dots \frac{a \cdot (b+c)}{b \cdot (b+c)}; (2) \dots \frac{(a+c) \cdot b}{(b+c) \cdot b}$$

*) Если дробь несократима, то это значитъ, что ее нельзя замѣнить другой дробью, равной ей, при помощи *умноженія* обоихъ членовъ на одно и то-же число; но еще не очевидно, что ее нельзя упростить при помощи какого либо иного приема, напр., вычитая изъ обоихъ ея членовъ числа, подлежащихъ образозъ выбранныя, или еще какъ нибудь иначе. Только послѣ доказательства теоремы § 103. можно утверждать, что *несократимая дробь неприводима*, т. е. *никакимъ образомъ не можетъ выразиться при помощи меньшихъ членовъ*

Изъ двухъ этихъ дробей больше будетъ та, у которой бѣльшій числитель, такъ что достаточно сравнить величины произведеній:

$$a \cdot (b + c) \quad \text{и} \quad (a + c) \cdot b, \text{ или } (\S\S 13 \text{ и } 15)$$

$$a \cdot b + a \cdot c \quad \text{и} \quad a \cdot b + c \cdot b.$$

Каждый изъ этихъ числителей состоитъ изъ двухъ слагаемыхъ, причемъ первая изъ нихъ ($a \cdot b$) одинаковы.

Что касается до вторыхъ слагаемыхъ

$$a \cdot c \quad \text{и} \quad b \cdot c,$$

то при $a < b$ очевидно $a \cdot c < b \cdot c$,

т. е., первая дробь меньше второй;

$$\text{если-же } a > b, \text{ то } a \cdot c > b \cdot c,$$

т. е., первая дробь больше второй.

Слѣд., если данная дробь $\frac{a}{b}$ есть дробь *правильная* ($a < b$),

то отъ прибавленія къ обоимъ членамъ ея поровну она *увеличивается*; если дробь *неправильная* ($a > b$), то отъ прибавленія къ обоимъ членамъ поровну она *уменьшается*, т. е. и въ томъ и другомъ случаѣ *приближается къ единицѣ*, что и тр. док.

Совершенно аналогичнымъ образомъ доказывается и вторая часть теоремы.

107. Приведеніе дробей къ общему наименьшему знаменателю.

Положимъ, мы имѣемъ нѣсколько несократимыхъ *) дробей:

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}, \frac{g}{h}.$$

Каждая изъ этихъ дробей на основанія § 103 можетъ быть равна только такой дроби, члены которой суть числа, *равнократныя* членамъ этой несократимой дроби. Слѣдовательно, если мы хотимъ привести всѣ данныя дроби къ общему знаменателю, то этотъ общій знаменатель долженъ быть числомъ, *кратнымъ* *всѣмъ* *даннымъ знаменателямъ*; если же требуется, чтобы общій знаменатель *всѣхъ* *этихъ* *дробей* *былъ* *наименьшимъ*, то онъ долженъ быть *общимъ наименьшимъ* *кратнымъ* *всѣхъ* *данныхъ знаменателей*.

*) Предполагая данныя дроби несократимыми, мы несколько не уменьшаемъ общности вопроса, такъ какъ всякая дробь, безъ измѣненія ея величины, можетъ быть приведена къ *простѣйшему виду*, т. е. сдѣлана *несократимой*.

Итакъ, пусть об. наим. крат. $(b, d, f, h) = M$, и пусть частныя отъ раздѣленія M на данныхъ знаменателяхъ соответственно будутъ:

$$q_b, q_d, q_f, q_h.$$

Умножая оба члена первой дроби на q_b , второй на q_d и т. д., получимъ:

$$\frac{a \cdot q_b}{b \cdot q_b}, \frac{c \cdot q_d}{d \cdot q_d}, \frac{e \cdot q_f}{f \cdot q_f}, \frac{g \cdot q_h}{h \cdot q_h}, \text{ или}$$

$$\frac{a \cdot q_b}{M}, \frac{c \cdot q_d}{M}, \frac{e \cdot q_f}{M}, \frac{g \cdot q_h}{M}.$$

Такимъ образомъ, все данныя дроби приведены къ общему наименьшему знаменателю; наименьшему потому, что M есть общее наименьшее кратное всѣхъ данныхъ знаменателей.

Отсюда вытекаетъ правило:

Для того, чтобы привести нѣсколько дробей къ общему наименьшему знаменателю, надо сдѣлать все данныя дроби несократимыми, найти общее наименьшее кратное всѣхъ знаменателей этихъ несократимыхъ дробей, и оба члена каждой дроби умножить на частное отъ дѣленія найденнаго наименьшаго кратнаго на знаменателя данной дроби.

ГЛАВА II.

Дѣйствія надъ дробями.

108. Надъ дробями можно производить все тѣ-же дѣйствія, какъ и надъ цѣлыми числами; только опредѣленія этихъ дѣйствій должны быть обобщены слѣдующимъ образомъ:

Сложеніе есть дѣйствіе, при помощи котораго опредѣляется сумма данныхъ чиселъ, т. е. число, содержащее все единицы и части единицы, заключающіяся во всѣхъ слагаемыхъ.

Вычитаніе есть дѣйствіе, при помощи котораго отъ одного изъ данныхъ чиселъ отнимаются все единицы и части единицы, содержащіяся въ другомъ данномъ числѣ *).

*) Можно также оставить опредѣленіе вычитанія, аналогичное прежневу (§1). Вычитаніе есть дѣйствіе, при помощи котораго находится разность однихъ чиселъ (цѣлыхъ или дробныхъ), т. е. такое число, (цѣлое или дробное), которое, будучи прибавлено къ меньшему изъ данныхъ, воспроизводитъ большее.

109. ТЕОРЕМА. Сумма или разность дробей съ однимъ и тѣмъ-же знаменателемъ равна дроби, числитель которой есть сумма или разность числителей данныхъ дробей, а знаменатель есть общій знаменатель данныхъ дробей.

Пусть даны дроби: $\frac{a}{n}$ и $\frac{b}{n}$. Первая дробь есть соединеніе a n -овыхъ частей единицы, вторая дробь есть соединеніе b такихъ-же частей единицы. Очевидно, что сумма a частей единицы съ b такими же частями даетъ $a+b$ такихъ же частей, т. е.:

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n}.$$

Также, вычтя b частей единицы изъ a такихъ же частей, найдемъ $a-b$ такихъ же частей, т. е.:

$$\frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a-b}{n}.$$

ЗАМѢЧАНІЕ. Если даны для сложенія или вычитанія дроби съ *неравными знаменателями*, то сначала приводятъ ихъ къ общему знаменателю, а затѣмъ поступаютъ по предыдущему.

110. Опредѣленіе дѣйствія умноженія, сдѣланное въ § 11 для цѣлыхъ чиселъ:

Умножить величину на цѣлое число значитъ повторить данную величину n разъ, сколько въ цѣломъ числѣ содержится единицъ,

очевидно, не имѣетъ смысла въ примѣненія къ числамъ дробнымъ, такъ какъ нельзя вять величину *слагаемымъ* дробное число *разъ*, напр., $\frac{3}{5}$ *раза*.

Поэтому необходимо сдѣлать другое *болѣе общее* опредѣленіе умноженія и при томъ такое, чтобы оно не только не противорѣчило сдѣланному ранѣе, но заключало бы его въ себѣ, какъ частный случай.

Опредѣленіе это слѣдующее:

Умножить величину (цѣлую или дробную) на какое-нибудь число (цѣлое или дробное) значитъ составить изъ одной новую величину, совершенно такимъ же образомъ, какъ множитель образуется изъ единицы.

Для вполне яснаго пониманія смысла этого опредѣленія, необходимо выяснитъ, что именно надо понимать подъ словами: „какъ множитель образуется изъ единицы“.

1. Если множитель есть число цѣлое, равное, напр., a , то онъ образуется изъ единицы при помощи сложения единицы, взятой a разъ.

Поэтому, умножить какую нибудь величину N (цѣлую или дробную) на число цѣлое, напр., a , значитъ повторить N слагаемымъ a разъ, что вполне соответствуетъ опредѣленію умноженія, сдѣланному раньше (§ 11).

2. Если множитель есть дробь, равная напр. $\frac{a}{b}$, то онъ образуется изъ единицы такъ: единица дѣлится на b равныхъ частей и такихъ частей берется a .

Поэтому, чтобы умножить какую нибудь величину N (цѣлую или дробную) на дробь, напр., $\frac{a}{b}$, надо раздѣлить N на b равныхъ частей, что даетъ

$$\frac{N}{b}$$

и такихъ частей взять a , что даетъ

$$\frac{N \cdot a}{b}.$$

III. При умноженіи дробей могутъ встрѣтиться три случая:

1. Множимое есть число цѣлое, множитель—дробное.
2. Множимое есть число дробное, множитель—цѣлое.
3. Множимое и множитель суть числа дробныя.

Такъ какъ всякое цѣлое число можетъ быть рассматриваемо, какъ дробь съ знаменателемъ, равнымъ единицѣ, то достаточно вывести правило только для умноженія двухъ дробей.

112. Пусть требуется, напр., умножить $\frac{a}{b}$ на $\frac{m}{n}$.

Для этого на основаніи опредѣленія (§ 110) надо изъ $\frac{a}{b}$ составить новое число такимъ же образомъ, какъ множитель $\frac{m}{n}$ составленъ изъ единицы, т. е. надо $\frac{a}{b}$ раздѣлить на n равныхъ частей, что даетъ (§ 99)

$$\frac{a}{b \cdot n},$$

и таких частей взять m , что даетъ (§ 98)

$$\frac{a \cdot m}{b \cdot n}$$

Итакъ:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \frac{a \cdot m}{b \cdot n}, \text{ т. е.}$$

Произведение двухъ дробей равно дроби, числитель которой есть произведение числителей, а знаменатель—произведение знаменателей данныхъ дробей.

113. Если произведение двухъ дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ умножается на третью дробь $\frac{e}{f}$, полученный результатъ—на четвертую дробь $\frac{g}{h}$ и т. д., то найденное произведение называется *произведениемъ несколькихъ дробей*.

Такъ какъ перемноженіе дробей сводится къ перемноженію цѣлыхъ чиселъ,—ихъ числителей и знаменателей,—то всѣ правила, выведенныя въ §§ 21—25 для цѣлыхъ чиселъ, остаются справедливыми и для того случая, когда нѣкоторые или даже всѣ множители произведенія суть числа дробныя.

Поэтому:

1. Произведение произвольнаго числа множителей (цѣлыхъ или дробныхъ) не измѣняется отъ перестановки производителей въ какомъ угодно порядкѣ.

2. Чтобы умножить произведение нѣсколькихъ множителей (цѣлыхъ или дробныхъ) на какое-нибудь число (цѣлое или дробное), достаточно одного изъ сомножителей умножить на это число.

3. Чтобы умножить число (цѣлое или дробное) на произведение нѣсколькихъ множителей (цѣлыхъ или дробныхъ), достаточно умножить его на каждое изъ нихъ.

4. Чтобы умножить одно произведение (изъ цѣлыхъ или дробныхъ множителей) на другое произведение (изъ цѣлыхъ или дробныхъ множителей), достаточно составить новое произведение изъ всехъ множителей обоихъ произведеній.

5. Во всякомъ произведеніи можно нѣсколько сомножителей (цѣлыхъ или дробныхъ) замѣнить вычисленною величиною ихъ произведенія.

114. ДѢЛЕНИЕ ДРОБЕЙ. Дѣленіе есть дѣйствіе, посредствомъ котораго, зная произведеніе двухъ на нихъ угодно чиселъ (цѣлыхъ или дробныхъ) и одно изъ нихъ, находятъ другое.

Такъ какъ произведеніе не измѣняется отъ перемѣны порядка сомножителей (цѣлыхъ или дробныхъ), то можно всегда считать, что *известный производитель есть множитель, а неизвестный—множимое* *).

Поэтому можно сказать, что *раздѣлить одно число (цѣлое или дробное) на другое (цѣлое или дробное) значитъ найти такое число, которое, будучи умножено на дѣлителя, воспроизведло бы дѣлимое.*

Пусть требуется раздѣлить какое-нибудь число, цѣлое или дробное, напр., A , на дробь $\frac{m}{n}$. Обозначимъ искомое частное буквою x .

На основаніи опредѣленія дѣйствія дѣленія, можемъ написать:

$$x \cdot \frac{m}{n} = A.$$

Равенство это указываетъ, что m n -овыхъ частей величины x равны A ; слѣд., одна n -овая часть x въ m разъ меньше A , т. е.

$$x \cdot \frac{1}{n} = \frac{A}{m},$$

а вся величина x будетъ въ n разъ больше, чѣмъ одна n -овая часть ея, т. е.

$$x = \frac{1}{n} \cdot \frac{A}{m}.$$

Итакъ,

$$A : \frac{m}{n} = A \cdot \frac{n}{m}.$$

Отсюда заключаемъ:

Для того, чтобы раздѣлить число (цѣлое или дробное) на дробь, достаточно умножить это число на дробь, (обратную *) данной.

*) Если-бы подобное предположеніе измѣнило даже смыслъ дѣйствія, онѣмъ не менѣе не можетъ измѣнить значенія искомага частнаго, а только эти насъ теперь и интересуютъ (§ 30).

*) Два числа называются *обратными*, если произведеніе ихъ равно единицѣ. Очевидно, чтобы получить дробь, обратную данной, достаточно числителя сдѣлать знаменателемъ, а знаменателя—числителемъ.

Напр.: $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{8}$ и $\frac{8}{5}$; 7 и $\frac{1}{7}$ и т. д.

115*). Разсмотримъ на числовыхъ примѣрахъ болѣе подробно всѣ случаи дѣленія, которыя могутъ встрѣтиться на практикѣ.

а) Дѣленіе двухъ цѣлыхъ чиселъ.

Докажемъ, что частное отъ дѣленія двухъ цѣлыхъ чиселъ равно дроби, имѣющей числителемъ дѣлимое, а знаменателемъ дѣлителя, т. е. что, напр., частное отъ дѣленія 13 на 5 равно дроби $\frac{13}{5}$.

Въ самомъ дѣлѣ, произведеніе $\frac{13}{5}$ на 5 равно 13; слѣдовательно, $\frac{13}{5}$ есть то число, которое, будучи умножено на дѣлителя (5), воспроизводитъ дѣлимое (13), а потому на основаніи опредѣленія (§ 114) заключаемъ, что $\frac{13}{5}$ есть искомое частное отъ раздѣленія 13 на 5, что и тр. док.

Если изъ неправильной дроби $\frac{13}{5}$ исключить цѣлое число, то получится $2\frac{3}{5}$; цѣлая часть этого выраженія (2) есть цѣлая часть частнаго отъ дѣленія 13 на 5 (§ 31); 3 есть остатокъ отъ этого дѣленія; дробь $\frac{3}{5}$ есть та дополнительная дробь, которую нужно прибавить къ цѣлой части частнаго, чтобы получить полное частное отъ дѣленія 13 на 5. Отсюда выводимъ правило: для полученія полнаго частнаго отъ дѣленія двухъ чиселъ, надо къ цѣлой части частнаго прибавить дополнительную дробь, имѣющую числителемъ остатокъ отъ дѣленія, а знаменателемъ— дѣлителя.

б) Дѣленіе дроби на цѣлое число.

Положимъ, требуется раздѣлить $\frac{7}{13}$ на 3. По опредѣленію § 114 это значитъ найти такое число, которое, будучи умножено на 3, дало бы $\frac{7}{13}$; отсюда очевидно, что искомое частное будетъ въ 3 раза меньше чѣмъ $\frac{7}{13}$, и мы можемъ получить это частное, уменьшивъ дробь $\frac{7}{13}$ въ 3 раза, для чего достаточно умножить знаменателя этой дроби на 3 (§ 99). Слѣдовательно, искомое частное будетъ равно $\frac{7}{13 \cdot 3}$. Отсюда вытекаетъ правило: Чтобы раздѣ-

*) Необходимо для Горнаго Института.

лить дробь на целое число, достаточно знаменателя дроби умножить на это число.

Примѣчаніе. Въмѣсто умноженія знаменателя можно раздѣлить числителя дроби (§ 98), если только такое дѣленіе возможно безъ остатка. Напр., частное отъ дѣленія $\frac{15}{8}$ на 5 равно $\frac{(15:5)}{8} = \frac{3}{8}$.

с) Дѣленіе цѣлаго числа на дробь.

Пусть требуется раздѣлить 11 на $\frac{4}{7}$. На основаніи опредѣленія § 114 заключаемъ, что произведеніе искомага частнаго на $\frac{4}{7}$ должно равняться 11; другими словами, $\frac{4}{7}$ искомага частнаго составляютъ 11; слѣд., $\frac{1}{7}$ частнаго будетъ въ 4 раза меньше 11, т. е. равна $\frac{11}{4}$; если одна седьмая часть частнаго равна $\frac{11}{4}$, то все частное будетъ, очевидно, въ 7 разъ больше, т. е. $\frac{11 \cdot 7}{4}$. Итакъ, чтобы раздѣлить цѣлое число на дробь, достаточно умножить это число на дробь, обратную данной.

д) Дѣленіе двухъ дробей.

Пусть требуется $\frac{3}{5}$ раздѣлить на $\frac{7}{8}$. Это значитъ найти такое число, которое при умноженіи на $\frac{7}{8}$ даетъ $\frac{3}{5}$. Слѣдовательно, $\frac{7}{8}$ искомага числа составляютъ $\frac{3}{5}$, а потому $\frac{1}{8}$ этого числа будетъ въ 7 разъ меньше, т. е. $\frac{3}{5 \cdot 7}$; все же число будетъ въ 8 разъ больше, чѣмъ $\frac{1}{8}$ -его, т. е. $\left(\frac{3}{5 \cdot 7}\right) \cdot 8 = \frac{3 \cdot 8}{5 \cdot 7}$.

Итакъ, $\frac{3}{5} : \frac{7}{8} = \frac{3 \cdot 8}{5 \cdot 7} = \frac{3}{5} \cdot \frac{8}{7}$, т. е. чтобы раздѣлить одну дробь на другую, достаточно умножить дѣлимую дробь на дробь, обратную дѣлителю.

Очевидно, всѣ эти правила представляютъ лишь частные случаи общаго правила дѣленія, выведеннаго въ § 114.

ГЛАВА III.

Десятичныя дроби.

116. ОПРЕДѢЛЕНІЯ. Десятичной дробью называется дробь съ цѣлыми членами, знаменатель которой равенъ 10, 100, 1000, 10000... и вообще какой-нибудь степени числа 10.

Такимъ образомъ, десятичная дробь можетъ выражать известное число *десятыхъ, сотыхъ, тысячныхъ, десятитысячныхъ* и т. д. частей единицы.

Десятичнымъ числомъ называется число, состоящее изъ соединения цѣлаго числа и десятичной дроби; въ болѣе обширномъ смыслѣ десятичнымъ числомъ называютъ также вообще всякое число, написанное по десятичной системѣ счисления.

117. Десятичныя дроби можно писать по такому же способу, какъ цѣлыя числа, введя слѣдующія условія:

1. Для отдѣленія цѣлой части десятичнаго числа отъ дробной будемъ ставить запятую послѣ цифръ единицъ цѣлой части.
2. Каждую цифру, стоящую вправо отъ предыдущей, условимел считать выражающей единицы, въ десять разъ меньшя.

Такимъ образомъ, первая цифра послѣ единицъ будетъ выражать *десятыя* доли единицы, вторая—*сотыя*, третья—*тысячныя* четвертая—*десятитысячныя* и т. д.

3. Если число не имѣетъ цѣлой части, ставимъ вмѣсто нея нуль, также нулемъ замѣняемъ все тѣ десятичныя единицы разныхъ разрядовъ, которыхъ недостаетъ въ числѣ.

На основаніи этихъ соглашеній десятичныя числа, выражающія:

$$5 \frac{32}{100} ; 11 \frac{2071}{10000} ; \frac{23}{10000},$$

напишутся такъ:

$$5, 32 ; 11, 2071 ; 0, 0023.$$

И наоборотъ, десятичныя дроби

$$2, 371 ; 0, 07$$

можно представить въ видѣ простыхъ дробей:

$$\frac{2371}{1000} ; \frac{7}{100}.$$

Слѣдовательно:

Для того, чтобы десятичное число, написанное по способу простых дробей, изобразить въ видѣ десятичной дроби, пишутъ сначала цѣлую часть, если она имѣется, затѣмъ пишутъ числитель, отдѣляя запятой справа отъ цѣлой части столько цифръ, сколько нулей въ знаменателѣ, и замыкая нулями всѣ тѣ десятичныя единицы разныхъ разрядовъ, которыхъ недостаетъ въ числѣ.

И наоборотъ:

Для того, чтобы число, написанное въ видѣ десятичной дроби, изобразить, какъ простую дробь, уничтожаютъ запятую и пишутъ полученное цѣлое число числителемъ; знаменателемъ же будетъ единица со столькоми нулями, сколько десятичныхъ знаковъ имѣется въ данной дроби.

118. Условимся обозначать десятичныя дроби въ общемъ видѣ при помощи слѣдующаго знакоположенія:

$$A, a_1 a_2 a_3 \dots a_n,$$

гдѣ буквой A означена вся цѣлая часть десятичной дроби, буквы же a_1, a_2, \dots, a_n обозначаютъ цифры десятичнаго числа, причемъ значекъ n при послѣдней цифрѣ показываетъ число десятичныхъ знаковъ.

Напр., въ десятичной дроби

$$82, 574$$

имѣемъ:

$$A = 82 ; a_1 = 5 ; a_2 = 7 ; a_3 = 4 ; n = 3.$$

Если при этомъ условиться обозначать знакоположеніемъ

$$\{A a_1 a_2 \dots a_n$$

то цѣлое число, которое получится, если уничтожить въ десятичной дроби запятую, то выводы предыдущаго параграфа могутъ быть выражены при помощи формулы:

$$A, a_1 a_2 a_3 \dots a_n = \frac{A a_1 a_2 a_3 \dots a_n}{10^n}.$$

119. ТЕОРЕМА. Величина десятичной дроби не измѣнится, если приписать къ ней, или уничтожить въ ней, одинъ или нѣсколько нулей справа.

Въ самомъ дѣлѣ, взявъ равенство

$$A, a_1 a_2 \dots a_n = \frac{A a_1 a_2 \dots a_n}{10^n}$$

и умноживъ числитель и знаменатель правой части на 10^k , получаемъ (§ 100):

$$A, a_1 a_2 \dots a_n = \frac{A a_1 a_2 \dots a_n \overbrace{00 \dots 0}^{k \text{ нулей}}}{10^{n+k}} = \frac{A a_1 a_2 \dots a_n \overbrace{00 \dots 0}^{k \text{ нулей}}}{10^n}$$

что и тр. док.

120. ТЕОРЕМА. Величина десятичной дроби увеличится (уменьшится) въ 10, 100, 1000 . . . разъ отъ перестановки запятой на одну, двѣ, три . . . цифры вправо (влѣво).

Въ самомъ дѣлѣ, если въ равенствѣ

$$A, a_1 a_2 \dots a_n = \frac{A a_1 a_2 \dots a_n}{10^n}$$

умножить въ правой части числитель (знаменатель) на 10, 100, 1000 . . . , то равенство нарушится, и правая часть сдѣлается въ десять, сто, тысячу . . . разъ больше (меньше) лѣвой; но

$$\frac{(A a_1 a_2 \dots a_n) \cdot 10}{10^n} = \frac{A a_1 a_2 \dots a_n}{10^{n-1}} = A a_1, a_2 a_3 \dots a_n$$

Также:

$$\frac{(A a_1 a_2 \dots a_n) \cdot 100}{10^n} = \frac{A a_1 a_2 \dots a_n}{10^{n-2}} = A a_1 a_2, a_3 \dots a_n,$$

и т. д., что и доказываетъ теорему.

Дѣйствія надъ десятичными дробями.

121. СЛОЖЕНІЕ. Въ десятичныхъ дробяхъ, такъ же какъ и въ цѣлыхъ числахъ, различныя цифры отъ правой руки къ лѣвой выражаютъ единицы послѣдовательно въ десять разъ большія, а потому сложене десятичныхъ дробей производится совершенно по тѣмъ-же правиламъ, какъ и сложене цѣлыхъ чиселъ.

Итакъ:

Для того, чтобы сложить нѣсколько десятичныхъ дробей, пишутъ

иъ одну подъ другой такъ, чтобы запятая, а слѣд. и цифры, выражающія единицы одинаковыхъ разрядовъ, находились въ одномъ вертикальномъ столбцѣ, а затѣмъ складываютъ иъ, какъ цѣлыя числа, помѣщая запятую въ полученной суммѣ подъ запятыми данныхъ чиселъ.

122. ВЫЧИТАНІЕ десятичныхъ дробей производится совершенно такъ-же, какъ и вычитаніе цѣлыхъ чиселъ:

Для того, чтобы сдѣлать вычитаніе двухъ десятичныхъ чиселъ, пишутъ меньшее число подъ большимъ такъ, чтобы запятая, а слѣд. и цифры, выражающія единицы одинаковыхъ разрядовъ, находились одна подъ другой, и затѣмъ поступаютъ съ дробями, какъ съ цѣлыми числами, помѣщая запятую въ полученной разности подъ запятыми данныхъ чиселъ.

123. УМНОЖЕНІЕ. Пусть, напр., требуется перемножить двѣ десятичныя дроби:

$$A, a_1 a_2 a_n \text{ и } B, b_1 b_2 b_k.$$

Представляя данныя десятичныя дроби подъ видомъ простыхъ дробей (§ 118)

$$\frac{A a_1 a_2 a_n}{10^n} \text{ и } \frac{B b_1 b_2 b_k}{10^k},$$

перемножаемъ эти дроби по общимъ правиламъ (§ 112):

$$\frac{A a_1 a_2 a_n}{10^n} \cdot \frac{B b_1 b_2 b_k}{10^k} =$$

$$\frac{(A a_1 a_2 a_n) \cdot (B b_1 b_2 b_k)}{10^{n+k}}$$

Послѣднее равенство показываетъ:

Для того, чтобы перемножить двѣ десятичныя дроби, надо откинуть запятая, перемножить образовавшіяся такимъ образомъ цѣлыя числа, и въ полученномъ произведеніи отдѣлать запятой, начиная справа, столько десятичныхъ знаковъ, сколько иъ было въ обоихъ произведеніяхъ вѣзствѣ.

124. ДѢЛЕНІЕ. Пусть, напр., требуется раздѣлить десятичную дробь

$$A, a_1 a_2 a_n \text{ на } B, b_1 b_2 b_k.$$

Представляемъ данныя десятичныя числа подъ видомъ обыкновенныхъ дробей:

$$\frac{A a_1 a_2 \dots a_n}{10^n}, \frac{B b_1 b_2 \dots b_k}{10^k}$$

и дѣлимъ эти дроби по извѣстнымъ правиламъ (§ 115):

$$\begin{aligned} \frac{A a_1 a_2 \dots a_n}{10^n} : \frac{B b_1 b_2 \dots b_k}{10^k} &= \\ &= \frac{A a_1 a_2 \dots a_n}{B b_1 b_2 \dots b_k} \cdot \frac{10^k}{10^n}. \end{aligned}$$

Равенство это показываетъ, что если дробь

$$\frac{A a_1 a_2 \dots a_n}{B b_1 b_2 \dots b_k}$$

можетъ обратиться въ конечную десятичную дробь, то искомое частное выразится точной десятичной дробью, въ противномъ же случаѣ величину частнаго можно выразить десятичной дробью только съ извѣстнымъ приближеніемъ. (См. ниже §§ 128—133).

125. При выполненіи дѣленія на практикѣ различаютъ обыкновенно два случая:

1. *Дѣлитель есть цѣлое число.*

Пусть, напр., требуется раздѣлить 92,748 на 12.

Разсматриваемъ дѣлимое, какъ цѣлое число тысячныхъ долей единицы и дѣлимъ

$$92748 \text{ на } 12.$$

Очевидно, полученное отъ этого дѣленія частное будетъ представлять собой тысячныхъ долей единицы.

Выполняя дѣленіе 92748 на 12, находимъ цѣлую часть частнаго 7729.

Поэтому частное отъ дѣленія 92,748 на 12 равно

$$\frac{7729}{1000} = 7,729.$$

Итакъ:

Для того, чтобы раздѣлить десятичную дробь на цѣлое число, выполняютъ дѣленіе, предполагая дѣлимое цѣлымъ, и въ полученномъ частномъ отдѣляютъ справа столько десятичныхъ знаковъ, сколько ихъ было въ дѣломомъ.

2. *Дѣлитель есть десятичная дробь.*

Этот случай приводится къ предыдущему посредствомъ умноженія дѣлимаго и дѣлителя на такую степень 10, чтобы дѣлитель содѣлался цѣлымъ числомъ, что не измѣнитъ частнаго (§ 36).

Пусть, напр., требуется раздѣлить

$$57,2432 \text{ на } 0,27.$$

Умноживъ дѣлимое и дѣлителя на 100, мы обратимъ данныя десятичныя числа въ 5724,32 и 27, дѣленіе которыхъ выполняется по предыдущему.

ГЛАВА IV.

Обращеніе обыкновенныхъ дробей въ десятичныя.

126. Рѣшеніе вопроса о томъ, всякая ли простая дробь можетъ быть преобразована въ равную ей десятичную, т. е. способна ли величина, представленная какой-нибудь дробью, выразиться въ десятичныхъ доляхъ единицы, основано на слѣдующей теоремѣ:

ТЕОРЕМА. Для того, чтобы данная несократимая *) дробь могла точно выразиться дробью десятичной, необходимо и достаточно, чтобы ея знаменатель не содержалъ другихъ простыхъ множителей, кромѣ 2 и 5.

Во-первыхъ, условіе это необходимо.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть, напр., несократимая дробь $\frac{a}{b}$ точно выражается десятичной дробью $\frac{k}{10^n}$, такъ что

$$\frac{a}{b} = \frac{k}{10^n}.$$

На основаніи § 103 заключаемъ, что

$$k = a \cdot q; 10^n = b \cdot q.$$

*) Въ этой теоремѣ, равно какъ и во всемъ послѣдующемъ изложеніи, мы предполагаемъ данную простую дробь несократимой, что несколько не ограничиваетъ вопроса, такъ какъ всякая дробь можетъ быть содѣлана несократимой.

гдѣ q есть нѣкоторое цѣлое число. Разлагая обѣ части равенства

$$10^n = b \cdot q$$

на простыхъ множителей, увидимъ, что въ лѣвую часть входятъ только множители 2 и 5, а потому и правая часть, а слѣд. и число b , не можетъ (§ 92) содержать иныхъ множителей, кромѣ 2 и 5.

Во-вторыхъ, условіе это достаточно.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть знаменатель данной несократимой дроби $\frac{a}{b}$ не содержитъ другихъ простыхъ множителей, кромѣ 2 и 5, такъ что

$$b = 2^k \cdot 5^n.$$

Докажемъ, что всегда можно найти точную десятичную дробь, равную дроби $\frac{a}{b}$.

Разсмотримъ три случая:

1°. Показатели степеней при 2 и 5 равны, т. е. $k = n$.

Тогда

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^k \cdot 5^k} = \frac{a}{10^k}, \quad *)$$

что представляетъ десятичную дробь съ числомъ десятичныхъ знаковъ, равнымъ k .

2°. Показатель степени при 2 больше показателя при 5, т. е. $k > n$.

Въ этомъ случаѣ имѣемъ:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^k \cdot 5^n} = \frac{a \cdot 5^{k-n}}{2^k \cdot 5^n \cdot 5^{k-n}} = \frac{a \cdot 5^{k-n}}{2^k \cdot 5^k} = \frac{a \cdot 5^{k-n}}{10^k},$$

что представляетъ десятичную дробь съ числомъ десятичныхъ знаковъ, равнымъ k .

3°. Показатель при 2 меньше показателя при 5, т. е. $k < n$.

Въ этомъ случаѣ:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^k \cdot 5^n} = \frac{a \cdot 2^{n-k}}{2^k \cdot 5^n \cdot 2^{n-k}} = \frac{a \cdot 2^{n-k}}{2^n \cdot 5^n} = \frac{a \cdot 2^{n-k}}{10^n},$$

*) Произведеніе $2^k \cdot 5^k$ преобразовывается такъ:

$$\begin{array}{ccccccc} 2^k \cdot 5^k & = & \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_k \text{ разъ} & \cdot & \underbrace{5 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 5}_k \text{ разъ} & = & \underbrace{(2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot \dots \cdot (2 \cdot 5)}_k \text{ разъ} = \\ & & 10 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 10 & & & & 10 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 10 \\ & & k \text{ разъ} & & & & k \text{ разъ} \end{array}$$

что представляет десятичную дробь съ числомъ десятичныхъ знаковъ, равнымъ n .

Итакъ, во всёхъ случаяхъ дробь $\frac{a}{2^k \cdot 5^n}$ можетъ быть выражена точной десятичной дробью, что и тр. док.

127. Изъ доказательства послѣдней теоремы видно, что если въ несократимой дроби

$$\frac{a}{2^k \cdot 5^n}$$

показатель $k > n$, то эта дробь преобразуется въ десятичную съ k десятичными знаками; если же $n > k$, то число десятичныхъ знаковъ получается равнымъ n .

Итакъ, можно дать **правило**:

Дробь, знаменатель которой не содержитъ иныхъ простыхъ множителей, кромѣ 2 и 5, можетъ быть преобразована въ конечную десятичную дробь, содержащую столько десятичныхъ знаковъ, сколько единицъ заключается въ томъ изъ показателей степеней при 2 или 5, который больше другою.

Примѣры. 1. Дана несократимая дробь $\frac{7}{40}$. Знаменатель ея $40 = 2^3 \cdot 5$; поэтому можемъ утверждать, что при обращеніи $\frac{7}{40}$ въ десятичную, получится конечная десятичная дробь съ тремя десятичными знаками. Дѣйствительно:

$$\frac{7}{40} = \frac{7}{2^3 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 5^3}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{175}{10^3} = 0,175.$$

2. Также дробь

$$\frac{11}{125} = \frac{11}{5^3} = \frac{11 \cdot 2^3}{5^3 \cdot 2^3} = \frac{88}{1000} = 0,088.$$

3. Также дробь

$$\frac{123}{80} = \frac{123}{2^4 \cdot 5} = \frac{123 \cdot 5^3}{2^4 \cdot 5^4} = 1,5375 \text{ и т. д.}$$

128. Теорема § 126 показываетъ, что весьма лишь немногія простыя дроби могутъ быть обращены въ точныя десятичныя, т. е., что не всякая величина способна точно выражаться въ десятичныхъ доляхъ единицы.

Покажемъ, что всякая дробь можетъ быть представлена десятичной дробью съ какой угодно степенью точности. Для этого

прежде всего выяснимъ, что именно надо понимать подъ приближеннымъ вычисленіемъ дроби съ данной степенью точности.

129. ОПРЕДѢЛЕНІЯ. Вычислить дробь съ точностью до единицы значитъ найти наибольшее число единицъ, содержащееся въ этой дроби.

Вычислить дробь съ точностью до $\frac{1}{10}$ значитъ найти наибольшее число десятыхъ, заключенныхъ въ этой дроби.

Вычислить дробь съ точностью до $\frac{1}{100}$ значитъ найти наибольшее число сотыхъ, заключенныхъ въ этой дроби . . . и т. д.

И вообще, вычислить дробь съ точностью до $\frac{1}{n}$ значитъ найти наибольшее число n -овыхъ, заключенныхъ въ этой дроби.

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что если какая-нибудь дробь $\left(\frac{a}{b}\right)$ больше $\frac{1}{n}$ -овой части единицы, взятой m разъ, и меньше той-же $\frac{1}{n}$ -овой части, взятой $m+1$ разъ, то дробь

$$\frac{m}{n}$$

я будетъ выражать приближенное значеніе данной дроби съ точностью до $\frac{1}{n}$.

Примѣръ. Дробь $\frac{3}{7}$ больше *) чѣмъ 0,4 и меньше 0,5, а потому

значеніе дроби $\left(\frac{3}{7}\right)$ съ точн. до $\frac{1}{10}$ — 0,4.

130. Изъ опредѣленія предыдущаго параграфа слѣдуетъ:

Чтобы вычислить дробь съ точностью до единицы, достаточно исключить цѣлое число, содержащееся въ этой дроби.

Пусть, напр., дана дробь $\frac{29}{13}$. Исключивъ цѣлое число найдемъ

$$\frac{29}{13} = 2 \frac{3}{13}.$$

*) Въ этомъ можно убѣдиться посредствомъ вычитанія.

Такъ какъ это число больше 2 и меньше 3, то значеніе дроби $\frac{29}{13}$ съ точн. до единицы равно 2.

131. ПРАВИЛО. Чтобы вычислить величину дроби съ точностью до $\frac{1}{n}$, достаточно найти цѣлую часть частного отъ дѣленія на знаменателя данной дроби произведенія числителя ея на число n и раздѣлить полученное частное на n .

Въ самомъ дѣлѣ, пусть имѣемъ дробь $\frac{a}{b}$. Обозначимъ буквой x наибольшее число $\frac{1}{n}$ ~~оныхъ~~, содержащееся въ этой дроби.

Тогда, согласно опредѣленія (§ 129), можно написать:

$$\frac{x}{n} < \frac{a}{b} \quad \text{и} \quad \frac{x+1}{n} > \frac{a}{b}.$$

Изъ перваго неравенства слѣдуетъ:

$$x < \frac{a \cdot n}{b};$$

изъ втораго:

$$x+1 > \frac{a \cdot n}{b},$$

откуда заключаемъ, что искомый числитель x есть цѣлая часть частного отъ дѣленія произведенія ($a \cdot n$) на b , что и тр. док.

Примѣры. 1. Найти значеніе дроби $\frac{2}{3}$ съ точн. до $\frac{1}{100}$.

Цѣлая часть частного отъ дѣленія ($2 \cdot 100$) на 3 равна 66, а потому $\frac{2}{3}$ съ точн. до $0,01 = 0,66$.

2. Найти значеніе дроби $\frac{4}{7}$ съ точн. до $\frac{1}{1000}$.

Цѣлая часть частного отъ дѣленія ($4 \cdot 1000$) на 7 равна 571, а потому $\frac{4}{7}$ съ точн. до $\frac{1}{1000} = 0,571$.

3. Найти значеніе дроби $\frac{23}{9}$ съ точн. до $\frac{1}{10000}$.

Цѣлая часть частнаго отъ дѣленія ($23 \cdot 10000$) на 9 равна 25555, и потому $\frac{23}{9}$ съ точн. до 0,0001 = 2,5555.

132. Въ томъ случаѣ, если знаменатель несократимой дроби не удовлетворяетъ необходимому и достаточному условию, выведенному въ § 126, данная дробь не можетъ быть выражена точной десятичной дробью, но на основаніи §§ 129—131 мы всегда можемъ вычислить величину ея съ точностью до 0,1; 0,01; 0,001 и т. д.

Сдѣлаемъ слѣдующее **ОПРЕДѢЛЕНІЕ**:

Обратить дробь въ десятичную значить вычислить ее послѣдовательно съ точностью до одной десятой, одной сотой, одной тысячной и т. д., и составить таблицу все болѣе и болѣе приближенныхъ десятичныхъ значеній данной дроби *).

133. Пусть требуется обратить въ десятичную дробь $\frac{7}{13}$.

Для этого, на основаніи опредѣленія предыдущаго параграфа, надо вычислить значеніе $\frac{7}{13}$ съ точн. до 0,1; 0,01; 0,001 и т. д.

Но вмѣсто того, чтобы дѣлить на 13 сперва 7, потомъ ($7 \cdot 10$), потомъ ($7 \cdot 100$); ($7 \cdot 1000$) и т. д. (§ 131), проще поступить такъ: дѣлимъ 7 на 13, къ каждому изъ послѣдовательныхъ остатковъ приписываемъ нуль и продолжаемъ подобное дѣленіе до тѣхъ поръ, пока не получимъ достаточнаго числа десятичныхъ знаковъ.

Очевидно, что подобнаго рода дѣленіе приведетъ насъ къ тому же самому ряду дѣйствій, какъ послѣдовательное дѣленіе на 13 чиселъ: 7; ($7 \cdot 10$); ($7 \cdot 100$); ($7 \cdot 1000$) . . . , а потому и результаты этихъ дѣленій, т. е. получающіеся десятичные знаки, будутъ одинаковы.

*) Опредѣленіе это *общее*, т. е. оно вѣрно и для того случая, когда данная дробь выражается *точной* десятичной, такъ какъ, если эта дробь равна, напр., нѣкоторому числу десятитысячныхъ, то мы получимъ ея точное значеніе, вычисляя ея величину съ точностью до 0,0001, а составляя всѣ дальнѣйшія приближенія, будемъ всегда получать *тотъ-же результатъ*.

Дѣйствіе располагается слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{r}
 7 \mid 13 \\
 \hline
 70 \mid 0,53846153 \dots \text{и т. д.} \\
 \hline
 50 \\
 \hline
 110 \\
 \hline
 60 \\
 \hline
 80 \\
 \hline
 20 \\
 \hline
 70 \\
 \hline
 50 \\
 \dots \\
 \dots \\
 \dots \\
 \text{и т. д.}
 \end{array}$$

Итакъ, можно написать:

Значеніе дроби	$\frac{7}{13}$	съ точн. до 1	= 0;
"	"	"	" 0,1 = 0,5;
"	"	"	" 0,01 = 0,53;
"	"	"	" 0,001 = 0,538;
"	"	"	" 0,0001 = 0,5384 и т. д.

Отсюда вытекаетъ правило:

Для того, чтобы обратить дробь въ десятичную, делимъ числитель на знаменатель; цѣлая часть отъ этого дѣленія даетъ число цѣлыхъ единиц въ десятичной дроби *); къ получившемуся остатку приписываемъ справа нули и продолжаемъ дѣленіе, приписывая последовательно нули къ каждому изъ остатковъ.

Если одно изъ дѣленій исполнится нацѣло, то данная дробь выразится точной десятичной; въ противномъ случаѣ дѣленіе можетъ быть продолжено безконечно, и мы будемъ получать все болѣе и болѣе приближенныя десятичныя значенія данной дроби.

*) Если числитель меньше знаменателя, то число цѣлыхъ равно нулю, и послѣ этого числитель рассматривается, какъ первый остатокъ отъ дѣленія; поэтому, напр. при обращеніи $\frac{7}{13}$ въ десятичную дробь первый остатокъ равенъ 7.

ГЛАВА V.

Періодическія десятичныя дроби.

134. ОПРЕДѢЛЕНІЯ. Если въ безконечной десятичной дроби, начиная съ нѣкотораго десятичнаго знака, совокупность нѣсколькихъ цифръ повторяется неограниченное число разъ въ одномъ и томъ-же порядкѣ, то такія десятичныя дроби называются **періодическими**, а повторяющаяся часть ихъ называется **періодомъ** данной дроби.

Если періодъ начинается непосредственно послѣ запятой, то періодическая дробь называется **простой или чистой**; если же между запятой и началомъ перваго періода находится нѣкоторая **неперіодическая** часть, то дробь называется **смѣшанной**.

Напр. 2, 57 57 57 57 есть **чистая** періодическая дробь; 7, 23 712 712 712 712 есть **смѣшанная** періодическая дробь.

135. Для сокращенія письма введемъ слѣдующія условныя обозначенія: будемъ изображать чистую періодическую дробь, содержащую p цифръ въ періодѣ, такъ:

$A, a_1 a_2 a_3 a_p a_1 a_2 a_p a_1 a_2 a_p$
или сокращенно:

$$A, (a_1 a_2 a_3 a_p).$$

Также смѣшанную періодическую дробь, состоящую изъ k цифръ до періода и p цифръ въ періодѣ, напишемъ:

$A, a_1 a_2 a_k a_{k+1} a_{k+2} a_{k+p} a_{k+1} a_{k+2} a_{k+p} . . .$
или сокращенно:

$$A, a_1 a_2 a_k (a_{k+1} a_{k+2} a_{k+p}).$$

136. ТЕОРЕМА. Всякая простая дробь при обращеніи въ десятичную даетъ или дробь конечную, или же дробь періодическую.

Пусть дана несократимая дробь $\frac{a}{b}$. Для того, чтобы обратить ее въ десятичную, поступаемъ по правилу, данному выше (§ 133), т. е. дѣлимъ на b числа:

$$a; a \cdot 10; a \cdot 10^2; a \cdot 10^3; a \cdot 10^4 a \cdot 10^n$$

Пусть соотвѣтственные остатки отъ дѣленія будутъ:

$$r_0; r_1; r_2; r_3; r_4 r_n$$

Какъ извѣстно изъ предыдущаго (§ 133), на практикѣ вмѣсто дѣленія на b чиселъ a , $a \cdot 10$, $a \cdot 10^2 \dots$ дѣлать на b числитель a , и къ каждому изъ послѣдовательныхъ остатковъ приписываютъ по нулю, такъ что обращеніе $\frac{a}{b}$ въ десятичную дробь производится такъ:

$$\begin{array}{r}
 a \quad | \quad b \\
 \hline
 r_0 \cdot 10 \quad | \quad q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \dots \\
 \hline
 r_1 \cdot 10 \\
 \hline
 r_2 \cdot 10 \\
 \hline
 r_3 \cdot 10 \\
 \hline
 r_4 \cdot 10 \\
 \dots \\
 \dots
 \end{array}$$

Дѣлимъ a на b ; *цѣлая часть частнаго* отъ этого дѣленія, q_0 , есть *цѣлая часть десятичной дроби*. Къ остатку отъ дѣленія a на b , равному r_0 , приписываемъ нуль, и произведеніе $(r_0 \cdot 10)$ дѣлимъ на b ; получаемъ цифру десятыхъ q_1 . Ко второму остатку r_1 приписываемъ нуль и дѣлимъ $(r_1 \cdot 10)$ на b , что даетъ цифру сотыхъ q_2 и третій остатокъ r_2 . Приписываемъ къ r_2 нуль и дѣлимъ $(r_2 \cdot 10)$ на b , что даетъ цифру тысячныхъ q_3 и четвертый остатокъ r_3 . Приписываемъ къ r_3 нуль и т. д.

Если одинъ изъ остатковъ $r_0, r_1, r_2 \dots r_n \dots$ окажется равнымъ нулю, то дѣленіе закончится, и дробь $\frac{a}{b}$ выразится *конечной* десятичной дробью *). Если же ни одинъ изъ послѣдовательныхъ остатковъ не будетъ равенъ нулю, то дѣйствіе дѣленія можетъ быть продолжено неопредѣленно, и получится *безконечная* десятичная дробь.

Въ этомъ случаѣ число **различныхъ** остатковъ не можетъ быть безконечнымъ, такъ какъ каждый изъ остатковъ долженъ быть непременно меньше дѣлителя b , а потому всѣ **возможные** остатковъ суть:

$$1; 2; 3; 4; \dots (b-1),$$

*) Это, какъ намъ извѣстно, можетъ случиться только тогда, если знаменатель b не содержитъ иныхъ множителей, кромѣ 2 и 5 (§ 126).

и слѣд., въ самомъ невыгодномъ случаѣ, максимумъ послѣ b минусъ одного дѣленія, мы **непремѣнно** получимъ одинъ изъ остатковъ-*бывшихъ уже раньше*. Такъ какъ, начиная съ этого момента, мы будемъ находиться совершенно въ тѣхъ-же условіяхъ, какъ тогда, когда этотъ-же остатокъ встрѣтился въ первый разъ, то, очевидно, все дальнѣйшее дѣйствіе будетъ *точнымъ повтореніемъ предыдущаго*, а потому и *цифры частнаго начнутъ повторяться въ одномъ и томъ-же определенномъ порядкѣ*, т. е. полученная дробь будетъ **непремѣнно периодической**.

Если-бы, напр., оказалось, что третій остатокъ (r_2) равенъ первому (r_0), то третья цифра частнаго q_3 будетъ такая же какъ первая цифра q_1 , а потому получится **безконечная чистая периодическая дробь**:

$$Q, q_1 q_2 q_1 q_2 q_1 q_2 \dots = Q, (q_1 q_2).$$

Также, если $r_4 = r_1$, то $q_6 = q_2$, и дробь будетъ:

$$Q, q_1 q_2 q_3 q_4 q_1 q_2 q_3 q_4 \dots = Q, q_1 (q_2 q_3 q_4).$$

137. ЗАМѢЧАНІЕ. Для яснаго усвоенія дальнѣйшаго, слѣдуетъ твердо помнить слѣдующее:

1) Что значекъ при r въ обозначеніяхъ, принятыхъ въ предыдущемъ параграфѣ и въ послѣдующемъ изложеніи, всегда на *единицу меньше номера остатка*, т. е.

<i>первый</i>	<i>остатокъ обозначимъ</i>	r_0
<i>второй</i>	”	r_1
<i>третій</i>	”	r_2
<i>четвертый</i>	”	r_3
.....
<i>двадцатый</i>	”	r_{19}
.....

и вообще, $n + \text{первый}$ ” ” ” r_n .

2) Каждый изъ этихъ остатковъ r , начиная съ r_1 , есть остатокъ отъ дѣленія на b произведенія изъ a на 10 въ степени, показатель которой равенъ значку при r , т. е.

r_1	есть остатокъ отъ дѣленія на b произведенія	$r \cdot 10^1$
r_2	”	$r \cdot 10^2$
r_3	”	$r \cdot 10^3$
r_4	”	$r \cdot 10^4$
.....
r_n	”	$r \cdot 10^n$.

3). Буква r_0 обозначает *первый остаток*, т. е. *окончательный остаток отъ дѣленія всего числа a на b* .

Напр., при обращеніи $\frac{257}{7}$ въ десятичную дробь, первый остатокъ $r_0 = 5$, т. е. $= \text{ост. } (257 : 7)$.

4). Буквы $q_1, q_2, q_3, q_4 \dots$ обозначаютъ соответственно первую, вторую, третью и т. д. цифры частнаго, т. е. *цифры десятиыхъ, сотыхъ, тысячныхъ и т. д. полученной десятичной дроби и суть соответственно:*

q_1	есть	цѣлая	часть	частнаго	отъ	дѣленія	на	b	числа	$r_0 \cdot 10$
q_2	"	"	"	"	"	"	"	"	"	$r_1 \cdot 10$
q_3	"	"	"	"	"	"	"	"	"	$r_2 \cdot 10$
q_4	"	"	"	"	"	"	"	"	"	$r_3 \cdot 10$
.
q_n	"	"	"	"	"	"	"	"	"	$r_{n-1} \cdot 10$

5). Число *цѣлыхъ* въ десятичной дроби, обозначаемое буквой Q , есть

цѣлая часть частнаго отъ дѣленія $(a : b)$.

138. Изъ разсужденій § 136 ясно, что при обращеніи несократимой дроби $\frac{a}{b}$ въ десятичную, число *цифръ въ периодъ всегда меньше знаменателя b* ; самое большее возможное число ихъ равно $(b - 1)$.

Примѣры:

$$\frac{2}{7} = 0,(285714) \dots \text{периодъ изъ 6 цифръ.}$$

$$\frac{5}{13} = 0,(384615) \dots \text{периодъ изъ 6 цифръ.}$$

$$\frac{6}{37} = 0,(162) \dots \text{периодъ изъ 3 цифръ.}$$

$$\frac{21}{22} = 0,9(18) \dots \text{периодъ изъ 2 цифръ.}$$

139. Очевидно, что при обращеніи $\frac{a}{b}$ въ десятичную дробь, получится дробь *чистая периодическая* въ томъ случаѣ, если

повторится *первый остаток* (r_0). Въ самомъ дѣлѣ, если, напр., $r_p = r_0$, то $q_{p+1} = q_1$, и получится *чистая* періодическая дробь:

$$Q, (q_1 q_2 q_3 \dots q_p).$$

Если же, напр., первые k остатковъ не будутъ повторяться, а первымъ изъ повторяющихся остатковъ окажется $k + \text{первый}$ (r_k), то полученная періодическая дробь будетъ *смѣшанной*, съ числомъ цифръ до періода, равнымъ k . Пусть, напр., $r_{k+p} = r_k$.

Тогда $q_{k+p+1} = q_{k+1}$, и періодическая дробь будетъ:

$$Q, q_1 q_2 q_3 \dots q_k (q_{k+1} q_{k+2} \dots q_{k+p}).$$

140. Выведемъ теперь признаки, по которымъ можно было бы судить о томъ, производить ли данная несократимая дробь при обращеніи въ десятичную *чистую или смѣшанную* періодическую дробь, сколько цифръ будетъ содержаться въ періодѣ той и другой дроби, и сколько цифръ будетъ до періода, въ случаѣ смѣшанной періодической.

При доказательствѣ дальнѣйшихъ теоремъ придется неоднократно ссылаться на выведенные выше необходимые и достаточные признаки равноостаточности чиселъ (§§ 48 и 49):

1. Если два числа равноостаточны относительно какого-нибудь дѣлителя, то разность ихъ дѣлится нацѣло на этого дѣлителя.

2. Если разность двухъ чиселъ дѣлится на какого-нибудь дѣлителя, то данныя числа равноостаточны относительно этого дѣлителя.

141. ТЕОРЕМА. Если знаменатель данной несократимой дроби есть число взаимно-простое съ 10, т. е. не дѣлится ни на 2, ни на 5, то эта дробь, при обращеніи въ десятичную, производитъ чистую періодическую.

Число цифръ въ періодѣ равно числу девятокъ въ наименьшемъ, дѣлящемся нацѣло на знаменателя данной дроби, числѣ ряда

$$9; 99; 999; 9999; 99999; \dots \text{ и т. д.}$$

1. Положимъ, дана несократимая дробь $\frac{a}{b}$, причемъ b есть число взаимно-простое съ десятиью; требуется доказать, что при обращеніи этой дроби въ десятичную получится *чистая* періодическая дробь.

Такъ какъ $\frac{a}{b}$ въ точную десятичную обратителся не можетъ (§ 126), то на основаніи теоремы § 136 заключаемъ, что $\frac{a}{b}$ обратится *непрерывно въ периодическую дробь*, т. е., что въ ряду остатковъ

$$r_0, r_1, r_2, r_3 \dots$$

встрѣятся *непрерывно два равныхъ остатка*.

Пусть, напр., эти равные остатки будутъ:

$$r_n = r_k.$$

Такъ какъ (§ 137)

$$r_n = \text{ост. } (a \cdot 10^n : b); \quad r_k = \text{ост. } (a \cdot 10^k : b),$$

то слѣд., числа

$$a \cdot 10^n \text{ и } a \cdot 10^k$$

равноостаточны относительно b , а потому разность ихъ должна (§ 48) раздѣляться нацѣло на b .

Но разность эта можетъ быть представлена такъ:

$$a \cdot 10^n - a \cdot 10^k = a \cdot 10^{n-k} \cdot 10^k - a \cdot 10^k = 10^k \cdot (a \cdot 10^{n-k} - a).$$

Итакъ, произведеніе

$$10^k \cdot (a \cdot 10^{n-k} - a)$$

дѣлится нацѣло на b ; но 10^k есть по условію теоремы число простое съ b , а потому второй множитель

$$a \cdot 10^{n-k} - a$$

долженъ непрерывно дѣлиться нацѣло на b (§ 68), а это показываетъ, что числа $a \cdot 10^{n-k}$ и a равноостаточны (§ 49) относительно b , т. е., что

$$\text{ост. } (a \cdot 10^{n-k} : b) = \text{ост. } (a : b), \text{ или}$$

$$r_{n-k} = r_0.$$

Итакъ, въ ряду остатковъ, получающихся при обращеніи дроби $\frac{a}{b}$ въ десятичную, найдется непрерывно одинъ изъ остатковъ, равный r_0 , т. е. *первому остатку*, а это и показываетъ, что полученная периодическая дробь будетъ *чистой периодической* (§ 139), что и тр. док.

2. Положимъ, что число цифръ въ періодѣ при обращеніи данной несократимой дроби $\frac{a}{b}$ въ десятичную, оказалось равнымъ r .

Это показываетъ, что при обращеніи $\frac{a}{b}$ въ десятичную дробь первые p остатковъ были *все различны* и что $p + \text{первый остатокъ}$ оказался равнымъ *первому*, т. е.

$$r_p = r_0.$$

Но (§ 137) $r_p = \text{ост. } (a \cdot 10^p : b)$; $r_0 = \text{ост. } (a : b)$.

Слѣд., числа $a \cdot 10^p$ и a *равноостаточны* относительно b , а потому разность ихъ, равная

$$a \cdot 10^p - a = a \cdot (10^p - 1)$$

дѣлится нацѣло (§ 48) на b ; но a по условію теоремы есть число *вз.-простое съ b **, слѣд. (§ 68), разность

$$10^p - 1$$

дѣлится на b .

Число же

$$10^p - 1 = \overbrace{999 \dots 99}^{p \text{ разъ}},$$

т. е. состоитъ изъ p девятокъ.

Докажемъ еще, что *никакое* число вида $(999 \dots 9)$, состоящее меньше чѣмъ изъ p девятокъ, *не можетъ раздѣлиться* на b , т. е. что число

$$\overbrace{999 \dots 99}^{p \text{ разъ}}$$

есть *дѣйствительно наименьшее* изъ чиселъ ряда

$$9; 99; 999; \dots$$

дѣлящееся нацѣло на b .

Допустимъ *противное*, и пусть, напр., число

$$\overbrace{999 \dots 9}^{m \text{ разъ}},$$

состоящее изъ m девятокъ, гдѣ $m < p$, дѣлится на b .

Если допустить, что число написанное m девятками, т. е. равное $10^m - 1$, дѣлится на b , то и произведеніе

$$a \cdot (10^m - 1) = a \cdot 10^m - a$$

*) Такъ какъ дробь $\frac{a}{b}$ несократима.

тоже раздѣлится на b , а это возможно только тогда (§ 49), когда числа $a \cdot 10^m$ и a будутъ равноостаточны относительно b , т. е. если

$$r_m = r_0.$$

Но если-бы это было такъ, то оказалось бы, что $q_{m+1} = q_1$, т. е., что число цифръ въ періодѣ было-бы не p , а m , т. е. меньше p , что противорѣчить условію.

Итакъ, если въ періодѣ получается p цифръ, то *наименьшее* изъ чиселъ ряда

$$9; 99; 999; 9999 \dots$$

дѣлящееся на b , будетъ дѣйствительно состоять изъ p девятокъ, что и тр. доказать.

142. Примѣры. Сколько цифръ въ періодѣ получится при обращеніи несократимыхъ дробей 1) $\frac{6}{37}$; 2) $\frac{2}{7}$; 3) $\frac{5}{13}$ въ десятичныя?

Веремъ числа ряда

$$9; 99; 999; 9999; 99999 \dots$$

и дѣлимъ послѣдовательно каждое изъ нихъ на знаменателей данныхъ дробей.

1. Первое изъ чиселъ этого ряда, дѣлящееся на 37, равно 999, т. е. состоитъ изъ трехъ девятокъ. Поэтому въ періодѣ получатся 3 цифры.

Дѣйствительно:

$$\frac{6}{37} = 0, (162) \dots \text{периодъ изъ 3 цифръ.}$$

2. Первое изъ чиселъ этого ряда, дѣлящееся на 7, равно 999999, т. е. періодъ долженъ состоять изъ 6 цифръ.

Дѣйствительно:

$$\frac{2}{7} = 0, (285714) \dots \text{периодъ изъ 6 цифръ.}$$

3. Первое изъ чиселъ этого ряда, дѣлящееся на 13, равно 999999, т. е. періодъ получится изъ 6 цифръ.

Дѣйствительно:

$$\frac{5}{13} = 0, (384615) \dots \text{периодъ изъ 6 цифръ.}$$

143. Изъ теоремы § 141 вытекаетъ слѣдствіе:

Всякое число, взаимно-простое съ 10, т. е. не дѣлящееся ни на 2, ни на 5, дѣлитъ нѣкоторую степень 10, уменьшенную на единицу, т. е. дѣлитъ нѣкоторое число, всѣ цифры котораго суть **девятки**.

Пусть b есть нѣкоторое число, простое съ 10.

Возьмемъ дробь $\frac{1}{b}$ и обращаемъ ее въ десятичную.

Мы знаемъ, что полученная дробь будетъ *чистой періодической* (§ 141), т. е., что въ ряду остатковъ *непрерывно* найдется *остатокъ, равный первому*; но первый остатокъ (r_0) при обращеніи $\frac{1}{b}$ въ десятичную дробь будетъ непрерывно равенъ 1 (§ 133, выноска на стр. 78).

Итакъ, пусть напр. $r_p - r_0 = 1$; слѣд., числа $1 \cdot 10^p$ и 1 равноостаточны относительно b , а потому разность ихъ

$$10^p - 1,$$

т. е. нѣкоторое число, состоящее изъ однѣхъ девятокъ, непрерывно раздѣлится на b (§ 48), что и тр. док.

144. ТЕОРЕМА. Если знаменатель несократимой дроби, дѣлится или на 2, или на 5, или на 2 и на 5 совместно, дѣлится еще на иныхъ простыхъ множителей, т. е. имѣетъ видъ $2^k \cdot 5^n \cdot c$, гдѣ c есть произведеніе всѣхъ остальныхъ простыхъ множителей, кромѣ 2 и 5, то дробь эта при обращеніи въ десятичную воспроизводитъ смѣшанную періодическую дробь.

Число цифръ до періода равно тому изъ показателей степени при 2 или 5, который больше другого; число же цифръ въ періодѣ равно числу девятокъ въ наименьшемъ, дѣлящемся нацѣло на c , числѣ ряда:

$$9; 99; 999; 9999; 99999; \dots$$

Пусть дана несократимая дробь $\frac{a}{b}$, знаменатель которой имѣетъ видъ $2^k \cdot 5^n \cdot c$, гдѣ c есть число взаимно-простое съ 10.

Допустимъ, что показатель $k > n$, и положимъ, что наименьшее изъ чиселъ ряда

$$9; 99; 999; 9999 \dots$$

дѣлящееся на a , есть

$$\frac{p \text{ разъ}}{999 \dots 9},$$

т. е. равно $10^p - 1$ *).

Требуется доказать:

1. Что при обращеніи $\frac{a}{b}$ въ десятичную, получится *смѣшанная* періодическая дробь;
2. Что число цифръ до періода будетъ равно *именно* k ;
3. Что число цифръ въ періодѣ будетъ равно *именно* p ?

Доказательство:

Обращая дробь $\frac{a}{b}$ въ десятичную, мы получимъ непремѣнно *бесконечную періодическую дробь* (§ 138), такъ что въ ряду остатковъ получатся непремѣнно и равные остатки. Положимъ, что рядъ остатковъ будетъ:

$$r_0, r_1, r_2 \dots r_{k-1}, r_k, r_{k+1} \dots r_{k+p-1}, r_{k+p} \dots$$

Теорема будетъ доказана, если мы покажемъ:

- 1) что ни одинъ изъ первыхъ k остатковъ, т. е.

$$r_0, r_1, r_2 \dots r_{k-1}$$

не повторится;

2) что $k + \text{первый}$ остатокъ (r_k) непремѣнно повторится, и притомъ именно въ остаткѣ $k + p + \text{первомъ}$ (r_{k+p}); и

3) что онъ не повторится ни въ одномъ изъ остатковъ *раньше* $k + p + \text{первою}$.

1. Ни одинъ изъ первыхъ k остатковъ, т. е.

$$r_0, r_1, r_2 \dots r_{k-1},$$

не повторится не можетъ. Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что какой-нибудь изъ остатковъ, напр. r_f , оказался равнымъ какому-либо изъ первыхъ k остатковъ, напр. r_f (гдѣ $f \leq k - 1$). Изъ равенства

$$r_f = r_f$$

слѣдуетъ, что числа

$$a \cdot 10^f \text{ и } a \cdot 10^f$$

равноостаточны относительно b , т. е., что разность

$$a \cdot 10^f - a \cdot 10^f = a \cdot 10^f \cdot (10^{f-f} - 1)$$

дѣлится на b (§ 48).

*) На основаніи § 143 мы знаемъ, что такъ какъ c есть число вз-простое съ 10, то непремѣнно существуетъ число вида $10^p - 1$, дѣлящееся на c

Но въ дѣлимое $a \cdot 10^f \cdot (10^{f-1} - 1)$ множитель 2 входитъ только въ степени, равной f^* ; въ дѣлитель же b , равный $2^k \cdot 5^n \cdot c$, множитель 2 входитъ въ степени k ; по условію $k > f$, а потому на основаніи § 93 заключаемъ, что

$$a \cdot 10^f \cdot (10^{f-1} - 1) \text{ на } b$$

не дѣлится, т. е. числа $a \cdot 10^f$ и $a \cdot 10^f$ не равноостаточны.

Итакъ, ни одинъ изъ первыхъ k остатковъ повториться не можетъ, т. е. число цифръ до периода не менѣе k .

2. Покажемъ, что $k + p$ — первый остатокъ равенъ остатку $k +$ первому, т. е. что

$$r_{k+p} = r_k^2$$

Въ самомъ дѣлѣ, числа эти суть остатки отъ дѣленій на b произведеній

$$a \cdot 10^{k+p} \text{ и } a \cdot 10^k.$$

Разность этихъ чиселъ

$$a \cdot 10^{k+p} - a \cdot 10^k = a \cdot 10^k \cdot (10^p - 1)$$

дѣлится **) на b , а потому числа эти равноостаточны (§ 49) относительно b , т. е. дѣйствительно $r_{k+p} = r_k$.

3. Остатокъ $k +$ первый не можетъ повториться раньше, чѣмъ въ остаткѣ $k + p +$ первомъ.

Дѣйствительно, допустимъ противное, и пусть, напр., остатокъ $r_{k+s} = r_k$, причемъ $s < p$.

Но если $r_{k+s} = r_k$, то числа $a \cdot 10^{k+s}$ и $a \cdot 10^k$ равноостаточны относительно b , а потому разность ихъ

$$a \cdot 10^{k+s} - a \cdot 10^k = a \cdot 10^k \cdot (10^s - 1)$$

должна раздѣлиться на b . Но дѣленіе

$$a \cdot 10^k \cdot (10^s - 1) \text{ на } 2^k \cdot 5^n \cdot c$$

не можетъ выполняться, такъ какъ числа a и 10^k взаимно простыя съ c по условію, число же

$$10^s - 1$$

на c раздѣлиться не можетъ, ибо число это состоитъ всего изъ s девятокъ, а $s < p$.

*) Въ самомъ дѣлѣ: въ a множитель 2 не входитъ, ибо по условію дробь $\frac{a}{b}$ несократима; число $(10^{f-1} - 1)$ состоитъ изъ однихъ девятокъ, и слѣд., на 2 не дѣлится; а $10^f - 2^f - 5^f$, т. е. содержитъ 2 въ степени f .

**) Въ самомъ дѣлѣ; $10^k - 2^k \cdot 5^k$, т. е. дѣлится на $2^k \cdot 5^k$, и кромѣ того $(10^p - 1)$ по условію дѣлится на c .

Итакъ, въ ряду остатковъ

$$r_0, r_1, r_2, \dots, r_{k-1}, r_k, \dots, r_{k+p}, \dots$$

ни одинъ изъ остатковъ

$$r_0, r_1, r_2, \dots, r_{k-1}$$

не повторится; остатокъ r_{k+p} равенъ остатку r_k ; и ни одинъ изъ остатковъ

$$r_{k+1}, r_{k+2}, \dots, r_{k+p-1}$$

не равенъ остатку r_k , т. е. при обращеніи дроби $\frac{a}{b}$ въ десятичную, получится смешанная периодическая дробь, у которой число цифръ до періода равно k , а число цифръ въ періодъ равно p , что и тр. док.

145. Предыдущія теоремы даютъ возможность раздѣлить всѣ несократимыя дроби, по отношенію къ обращенію ихъ въ десятичныя, на три класса:

1. Несократимыя дроби, знаменатели которыхъ имѣютъ видъ

$$2^k \cdot 5^n,$$

т. е. не содержатъ иныхъ множителей, кромѣ 2 и 5.

Эти дроби производятъ *конечныя десятичныя дроби*, причемъ число десятичныхъ знаковъ равно тому изъ показателей степеней при 2 или 5, который больше другого.

2. Несократимыя дроби, знаменатели которыхъ суть числа взаимно-простыя съ 10, т. е. не дѣлятся ни на 2, ни на 5.

Дроби эти производятъ *чистыя периодическія дроби*, причемъ число цифръ въ періодъ равно числу девятокъ въ *наименьшемъ*, дѣлящемся на даннаго знаменателя, числѣ ряда

$$9; 99; 999; 9999; 99999 \dots$$

3. Несократимыя дроби, знаменатели которыхъ, дѣлясь или на 2, или на 5, или и на 2 и на 5, содержатъ еще и другихъ простыхъ множителей, отличныхъ отъ 2 и 5, т. е. имѣютъ видъ

$$2^k \cdot 5^n \cdot c,$$

гдѣ c — обозначаетъ произведеніе всѣхъ остальныхъ множителей, кромѣ 2 и 5.

Дроби эти производятъ *смешанныя периодическія дроби* съ числомъ цифръ до періода, равнымъ тому изъ показателей при 2 или 5, который больше другого, и съ числомъ цифръ въ періодъ, равнымъ числу девятокъ въ *наименьшемъ*, дѣлящемся на произведеніе c , числѣ ряда

$$9; 99; 999; 9999; 99999 \dots$$

146. Примеры. Какія дроби получаются при обращеніи

1) $\frac{5}{21}$; 2) $\frac{14}{259}$; 3) $\frac{6}{104}$; 4) $\frac{123}{16}$; 5) $\frac{19}{202}$; 6) $\frac{954}{840}$

въ десятичныя?

1. Дробь $\frac{5}{21}$ — несократима. Знаменатель ея $21 = 3 \cdot 7$ есть число простое съ 10; слѣд., дробь эта производитъ чистую періодическую. Дѣля числа ряда

$$9; 99; 999; 9999 \dots$$

на 21, находимъ, что наименьшее изъ этихъ чиселъ, дѣлящееся на 21 есть 999999, а потому число цифръ въ періодѣ должно равняться шести. Дѣйствительно:

$$\frac{5}{21} = 0, (238095) \dots \text{чист. пер. др. съ пер. въ 6 цифръ.}$$

2. Дробь $\frac{14}{259}$ сокращается на 7; сокративъ, находимъ

$\frac{2}{37}$. Знаменатель 37 есть число простое съ десятию, а потому дробь эта произведетъ чистую періодическую. Дѣля числа

$$9; 99; 999 \dots$$

на 37, видимъ, что первое изъ этихъ чиселъ, дѣлящееся на 37, равно 999, а потому число цифръ въ періодѣ должно равняться тремъ. Дѣйствительно:

$$\frac{2}{37} = 0, (054) \dots \text{чист. пер. др. съ пер. въ 3 цифры.}$$

3. Дробь $\frac{6}{104}$ сокращается на 2; сокративъ, находимъ $\frac{3}{52}$.

Знаменатель $52 = 2^2 \cdot 13$; слѣд., дробь эта произведетъ смѣшанную періодическую, съ числомъ цифръ до періода, равнымъ двумъ и съ числомъ цифръ въ періодѣ, равнымъ шести *). Дѣйствительно:

$$\frac{3}{52} = 0,05 (769230).$$

*) Такъ какъ наименьшее изъ чиселъ ряда $9; 99; 999 \dots$, дѣлящееся на 13, есть 999999, т е состоитъ изъ шести девятокъ.

4: Дробь $\frac{123}{16}$ несократима. Знаменатель ея $16 = 2^4$, а потому дробь эта произведетъ конечную десятичную съ четырьмя десятичными знаками.

Дѣйствительно:

$$\frac{123}{16} = 7,6875.$$

5. Дробь $\frac{19}{202}$ несократима. Знаменатель ея $202 = 2 \cdot 101$.

Наименьшее изъ чиселъ ряда

9; 99; 999; 9999 ,

дѣлящееся на 101, равно 9999, а потому $\frac{19}{202}$ произведетъ смѣшанную періодическую съ однимъ десятичнымъ знакомъ до періода и съ 4-мя десятичными знаками въ періодѣ.

Дѣйствительно:

$$\frac{19}{202} = 0,0(9405).$$

6. Дробь $\frac{954}{840}$ сокращается на 2. Сокративъ, получаемъ:

$\frac{477}{420}$

. Знаменатель $420 = 2^2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7$. Слѣд., данная дробь произведетъ смѣшанную періодическую; число цифръ до періода будетъ равно двумъ; для опредѣленія же числа цифръ въ періодѣ, дѣлимъ на произведеніе всѣхъ простыхъ множителей, входящихъ въ знаменатель, кромѣ 2 и 5, т. е. на $3 \cdot 7 = 21$ числа ряда

.9; 99; 999

Наименьшее изъ этихъ чиселъ, дѣлящееся на 21, равно 999999, т. е. состоитъ изъ шести девятокъ. Поэтому число цифръ въ періодѣ должно быть равнымъ шести.

Дѣйствительно:

$$\frac{477}{420} = 1,13(571428).$$

ГЛАВА VI.

Обращеніе періодическихъ дробей въ обыкновенныя.

147. Если имѣется періодическая десятичная дробь, то во многихъ случаяхъ бываетъ необходимо обратить ее въ обыкновенную дробь, т. е. найти такую обыкновенную дробь, которая при обращеніи въ десятичную, воспроизвела бы данную періодическую дробь.

При рѣшеніи этого вопроса, будемъ для простоты разсужденія разсматривать только дроби, меньшія единицы, т. е. такія періодическія дроби, въ которыхъ цѣлая часть равна нулю. Такое ограниченіе нисколько не уменьшаетъ общности выводовъ, такъ какъ, если, напр., дробь

$$0, (a_1 a_2 a_3 \dots a_k)$$

окажется равной дроби $\frac{m}{n}$, то, очевидно, что дробь

$$A, (a_1 a_2 a_3 \dots a_k)$$

будетъ равна

$$A + \frac{m}{n}.$$

148. Пусть дана чистая періодическая дробь, содержащая p цифръ въ періодѣ, напр.

$$0, (a_1 a_2 a_3 \dots a_p)$$

и требуется опредѣлять, какой простой дроби она равна. Обозначимъ искомую величину данной періодической дроби буквой x , такъ что

$$x = 0, (a_1 a_2 a_3 \dots a_p) \dots \dots (1).$$

Умножимъ обѣ части этого равенства на такую степень десяти, чтобы одинъ періодъ получился передъ запятой, т. е. чтобы запятая передвинулась на p десятичныхъ знаковъ вправо. Для этого, очевидно, надо умножить обѣ части на 10^p , такъ что

$$10^p \cdot x = a_1 a_2 a_3 \dots a_p, (a_1 a_2 a_3 \dots a_p).$$

Послѣднее равенство можно переписать такъ:

$$10^p \cdot x = a_1 a_2 a_3 \dots a_p + 0, (a_1 a_2 a_3 \dots a_p),$$

или на основаніи равенства (1):

$$10^p \cdot x = a_1 a_2 a_3 \dots a_p + x.$$

Вычитая изъ обѣихъ частей по x , получаемъ:

$$10^p \cdot x - x = a_1 a_2 a_3 \dots a_p, \text{ или: } x (10^p - 1) = a_1 a_2 a_3 \dots a_p,$$

$$\text{откуда } x = \frac{a_1 a_2 a_3 \dots a_p}{10^p - 1}.$$

Но число вида $10^p - 1$ есть число, состоящее изъ p девятокъ, а потому

$$x = \frac{a_1 a_2 a_3 \dots a_p}{\underbrace{999 \dots 9}_p \text{ разъ}}.$$

Замѣняя въ послѣднемъ равенствѣ x его значеніемъ изъ равенства (1), получаемъ окончательно:

$$0, (a_1 a_2 a_3 \dots a_p) = \frac{a_1 a_2 a_3 \dots a_p}{\underbrace{999 \dots 9}_p \text{ разъ}}.$$

Послѣднее равенство выражаетъ **ТЕОРЕМУ**:

Всякая чистая періодическая дробь, не имѣющая цѣлой части, равна такой обыкновенной дроби, числитель которой есть періодъ, а знаменатель есть число, написанное столькими девятками, сколько цифръ въ періодѣ.

148а. Итакъ, всякая чистая періодическая дробь при обращеніи въ простую даетъ такую дробь, знаменатель которой состоитъ изъ числа, написаннаго *одними девятками*, т. е. безусловно не содержащаго множителей ни 2, ни 5. Слѣдовательно, и по приведеніи полученной дроби къ простѣйшему виду (т. е. послѣ сокращенія ея) знаменатель не будетъ дѣлиться ни на 2, ни на 5, а потому выводимъ заключеніе: **знаменатель обыкновенной дроби, производящей чистую періодическую, есть непременно число взаимно-простое съ десятию.**

Эта теорема *обратна* доказанной въ § 141 *).

*. Въ § 141 доказывается, что дробь, знаменатель которой есть число вз.-простое съ 10-ью, обращается въ чистую періодическую. Здѣсь доказано *наоборотъ*, что если дробь производитъ чистую періодическую, то знаменатель ея есть число вз.-простое съ 10-ью. Слѣдовательно, эти теоремы *обратны* другъ другу.

149. Положимъ, дана смѣшанная періодическая дробь

$$0, a_1 a_2 \dots a_k (a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{k+p}),$$

содержащая k цифръ до періода и p цифръ въ періодѣ.

Требуется обратить эту дробь въ обыкновенную.

Обозначимъ искомую обыкновенную дробь буквой x , такъ что

$$x = 0, a_1 a_2 \dots a_k (a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{k+p}).$$

Умножимъ обѣ части этого равенства на такую степень десяти, чтобы періодъ начинался непосредственно послѣ запятой, т. е., чтобы въ правой части получилась чистая періодическая дробь. Очевидно, для этого надо умножить обѣ части равенства на 10^k , такъ что

$$x \cdot 10^k = a_1 a_2 \dots a_k (a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{k+p}).$$

Такъ какъ теперь дробь, находящаяся въ правой части, есть чистая періодическая съ періодомъ въ p цифръ, то на основании § 148 имѣемъ:

$$\begin{aligned} x \cdot 10^k &= a_1 a_2 \dots a_k + \frac{a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{k+p}}{10^p - 1} = \\ &= \frac{(a_1 a_2 \dots a_k) \cdot 10^p + a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{k+p} - a_1 a_2 \dots a_k}{10^p - 1} = \\ &= \frac{\text{p нулей}}{10^p - 1} \\ &= \frac{a_1 a_2 \dots a_k \text{ 00 } \dots \text{ 0} + a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{k+p} - a_1 a_2 \dots a_k}{10^p - 1} \end{aligned}$$

Но сумма двухъ чиселъ:

$$\frac{\text{p нулей}}{10^p - 1} + \frac{\text{число въ p цифръ}}{10^p - 1}$$

очевидно, равна числу:

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_k a_{k+1} \dots a_{k+p}.$$

Слѣдовательно:

$$x \cdot 10^k = \frac{a_1 a_2 \dots a_{k+p} - a_1 a_2 \dots a_k}{\underbrace{999 \dots 9}_{\text{p девятокъ}}},$$

или, наконецъ, дѣля на 10^k :

$$x = 0, a_1 a_2 \dots a_k (a_{k+1} \dots a_{k+p}) = \frac{a_1 a_2 \dots a_{k+p} - a_1 a_2 \dots a_k}{\underbrace{999 \dots 9000 \dots 0}_{\text{p девятокъ k нулей}}}$$

Отсюда вытекает ТЕОРЕМА:

Всякая смѣшанная періодическая дробь, не имѣющая цѣлой части, равна простой дроби, числитель которой есть разность числа, стоящаго между запятой и началомъ второго періода и числа, стоящаго между запятой и началомъ перваго періода; знаменатель есть число, состоящее изъ цифры 9, написанной столько разъ, сколько цифръ въ періодѣ, въ сопровожденіи столькихъ нулей, сколько имѣется цифръ до періода.

149а. Итакъ, всякая смѣшанная періодическая дробь, при обращеніи въ простую, даетъ дробь, знаменатель которой пишется нѣсколькими девятками въ сопровожденіи нулей.

Если, напр., этотъ знаменатель состоитъ изъ p девятокъ и k нулей, т. е. имѣетъ видъ

$$\underbrace{999 \dots 900 \dots 0}_{p \text{ разъ } \quad k \text{ разъ}}$$

то онъ дѣлится 1) на 2^k , 2) на 5^k и 3) на всѣхъ первоначальныхъ множителей, взаимно-простыхъ съ десятью, на которыхъ дѣлится число $999 \dots 9$.

Полученная отъ обращенія смѣшанной періодической обыкновенная дробь часто можетъ быть приведена къ болѣе простому виду посредствомъ сокращенія. Но во всякомъ случаѣ отъ этого сокращенія въ знаменателѣ не могутъ уничтожиться **всѣ** первоначальные множители, образующіе число $999 \dots 9$, такъ какъ въ противномъ случаѣ оказалось-бы, что въ знаменателѣ остались только двойки и пятерки, а дробь съ подобнымъ знаменателемъ, на основаніи изложеннаго въ § 126, способна произвести только конечную десятичную, а никакъ не смѣшанную періодическую.

Итакъ, знаменатель дроби, производящей смѣшанную періодическую, даже послѣ приведенія къ простѣйшему виду, кромѣ множителей 2 или 5 (или 2 и 5), содержитъ еще непременно и другихъ множителей, простыхъ съ десятью.

Замѣтимъ еще слѣдующее: послѣдняя цифра непериодической части смѣшанной періодической дроби не можетъ равняться послѣдней цифрѣ періода, *если только при опредѣленіи періода не произошла ошибка*. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ, напр., дробь $0,24545454 \dots$. Въ періодѣ этой дроби стоитъ 45, а передъ періодомъ 2, т. е. $0,24545454 \dots = 0,2(45)$. Если-бы мы предположили, что въ періодѣ данной дроби находится 54, а впереди 24,

т. е., что $0,2454545\dot{4}$. . . = $0,24(54)$, то оказалось-бы, что непериодическая и периодическая части оканчиваются одинаковой цифрой (4); но это произошло, очевидно, исключительно *из-за ошибки в определении периода*, который начинается въ дѣйствительности съ 4, а не съ 5. И вообще: *если послѣдняя цифра непериодической части окажется одинаковой съ послѣдней цифрой периода, то это показываетъ, что произошла ошибка в определении периода, который въ дѣйствительности начинается на одну цифру раньше, чѣмъ взято.*

Число, получаемое въ числитель при обращеніи смѣшанной періодической дроби $0, a_1 a_2 \dots a_k (a_{k+1} \dots a_{k+p})$ въ обыкновенную, равно, какъ указано въ § 149, разности

$$a_1 a_2 \dots a_{k+p} - a_1 a_2 \dots a_k \dots \dots \dots (1)$$

Разность эта оканчивается той-же цифрой, какъ разность цифръ единиц уменьшаемаго и вычитаемаго ($a_{k+p} - a_k$). Но только что доказано, что a_{k+p} (послѣдняя цифра периода) не можетъ равняться a_k (послѣдней цифрѣ непериодической части), а потому разность (1), т. е. числитель полученной дроби, не можетъ оканчиваться нулемъ, т. е. не можетъ раздѣлиться на 10. Изъ этого слѣдуетъ, что дробь, получаемая при обращеніи смѣшанной періодической въ простую, не можетъ быть сокращена на 10, а потому, если числитель и знаменатель дѣлятся оба на 2, то они не могутъ сократиться на 5, и наоборотъ. Слѣдовательно, если полученная отъ обращенія дробь будетъ приведена въ простѣйшій видъ, то послѣ сокращенія въ знаменателѣ ея непременно останутся или множитель 2 или множитель 5, повторенный k разъ (т. е. столько разъ, сколько въ знаменателѣ было нулей).

Изъ сказаннаго вытекаетъ **ТЕОРЕМА**:

Большій изъ показателей степеней при двойкѣ или пятёркѣ въ знаменателѣ дроби, получаемой отъ обращенія смѣшанной періодической въ обыкновенную, равенъ числу цифръ до периода въ обрацаемой смѣшанной періодической дроби.

Очевидно, эта теорема является обратной теоремой по отношенію къ паложенному въ § 144.

150. Примѣры.

Чистая періодическая дробь

$$0, 24 \overline{24} 24 \dots$$

равна

$$\frac{24}{99} = \frac{8}{33}$$

Также дробь

5, 126 126 126

равна

$$5 + \frac{126}{999} = 5 \frac{14}{111} = \frac{569}{111}.$$

Смѣшанная періодическая дробь

0, 193 18 18 18 18

равна

$$\frac{19318 - 193}{99000} = \frac{19125}{99000} = \frac{17}{88}.$$

Также дробь

$$1,2 (297) = 1 + \frac{2297 - 2}{9990} = 1 + \frac{2295}{9990} = 1 + \frac{17}{74} = \frac{91}{74}.$$

Также дробь

$$1,13 (571428) = 1 + \frac{13571428 - 13}{99999900} = 1 + \frac{13571415}{99999900} =$$

$$= 1 + \frac{57}{420} + \frac{477}{420}.$$

ПРОГРАММА

**вступительнаго экзамена по Ариметикѣ, принятая во всѣхъ
Институтахъ.**

(Кромѣ Инст. Ниж. Пут. Сообш. и Лѣсн.ою, гдѣ Ариметика на экзаменѣ вовсе не требуется).

Сложеніе и вычитаніе цѣлыхъ чиселъ. Доказательство формуль:

$$a + (b + c) = a + b + c, \quad a + (b - c) = a + b - c,$$

$$a - (b + c) = a - b - c, \quad a - (b - c) = a - b + c.$$

Умноженіе цѣлыхъ чиселъ. Доказательство формулы:

$$(a + b) \cdot c = ac + bc.$$

Теорема о неизмѣняемости произведенія нѣсколькихъ чиселъ отъ перестановки сомножителей.

Умноженіе произведенія на какое-нибудь число, умноженіе числа на произведеніе и умноженіе двухъ произведеній. Во всякомъ произведеніи можно нѣсколько сомножителей замѣнить ихъ произведеніемъ.

Произведеніе степеней одного и того-же числа.

Дѣленіе цѣлыхъ чиселъ. Теорема: если дѣлимое и дѣлители умножить на одно и то-же цѣлое число, то частное не измѣнится, а остатокъ умножится на это число.

Дѣленіе произведенія на данное число. Дѣленіе даннаго числа на произведеніе и въ томъ случаѣ, когда при дѣленіяхъ получаются остатки.

Теоремы о дѣлимости чиселъ:*)

- 1) Если a и b дѣлятся на c , то и $a + b$ дѣлится на c .

*) Съ этого пункта начинается программа по Ариметикѣ въ Электротехническомъ Институтѣ. Всѣ предыдущіе вопросы изъ нея выпущены.

2) Если a дѣлится на c , а b не дѣлится на c , то $a + b$ не дѣлится на c .

3) Если a дѣлится на b , и b дѣлится на c , то a дѣлится на c .

4) Если a и b дѣлятся на c , то и остатокъ отъ дѣленія a на b дѣлится на c .

Признаки дѣлимости на 2, 4, 8, 5, 25, 3 и 9.

Нахожденіе наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ при помощи послѣдовательныхъ дѣленій. Теоремы:

1) Всякій дѣлитель данныхъ чиселъ есть дѣлитель ихъ наибольшаго дѣлителя.

2) При умноженіи или дѣленіи данныхъ чиселъ на какое-нибудь число, ихъ наибольшій дѣлитель умножится или раздѣлится на то-же число.

3) При дѣленіи данныхъ чиселъ на ихъ наибольшаго дѣлителя въ частномъ получаются числа взаимно-простыя.

4) Если a простое съ b и ac дѣлится на b , то c дѣлится на b .

5) Если числа a, b, \dots, m попарно взаимно-простыя и n дѣлится на каждое изъ нихъ, то n дѣлится на произведеніе $ab \dots m$.

Вычисленіе наименьшаго кратнаго двухъ чиселъ при помощи ихъ наибольшаго дѣлителя. Теоремы:

1) Всякое кратное данныхъ чиселъ есть кратное ихъ наименьшаго кратнаго.

2) При дѣленіи наименьшаго кратнаго на данныя числа въ частномъ получаются числа взаимно-простыя и обратно.

Понятіе о числѣ абсолютно-простомъ. Теоремы:

1) Всякое число имѣетъ простаго дѣлителя.

2) Рядъ простыхъ чиселъ безграниченъ.

3) Если простое число дѣлитъ произведеніе, то оно дѣлитъ по крайней мѣрѣ одного изъ сомножителей.

4) Если каждое изъ чиселъ a, b, \dots, m простое съ каждымъ изъ чиселъ $\alpha, \beta, \dots, \rho$, то k произведеніе $ab \dots m$ простое съ $\alpha\beta \dots \rho$.

5) Всякое число допускаетъ единственное разложеніе на простыхъ сомножителей.

Необходимое и достаточное условіе дѣлимости данныхъ чиселъ, представленныхъ въ видѣ произведенія простыхъ сомножителей; отысканіе наибольшаго дѣлителя и наименьшаго кратнаго данныхъ чиселъ, представленныхъ въ видѣ произведенія простыхъ сомножителей.

Приведеніе дробей къ простѣйшему виду. Теорема: если $\frac{a}{b}$

несократимая дробь и $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $e = am$, $d = bm$.

Сравненіе дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{a+c}{b \pm c}$ по ихъ величинѣ.

Приведеніе дробей къ общему наименьшему знаменателю.

Сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе дробей.

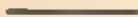
Распространеніе теоремъ, относящихся къ произведеніямъ цѣлыхъ чиселъ, на случай чиселъ дробныхъ.

Дѣйствія надъ десятичными дробями.

Обращеніе обыкновенныхъ дробей въ десятичныя.

Условія, при которыхъ данная дробь обращается въ конечную десятичную. Необходимость появленія периодической десятичной дроби, если эти условія не выполнены.*) Условія, при которыхъ данная дробь обращается въ чистую или смѣшанную периодическую дробь. Число цифръ до періода.

Обращеніе періодическихъ дробей въ обыкновенныя.



*) Этимъ пунктомъ заканчивается программа СПб. Технологическаго Института. Всѣ дальнѣйшіе вопросы изъ нея выпущены

Оглавленіе.

ОТДѢЛЪ I. §§ 1—41.

Ариѳметическія дѣйствія надъ цѣлыми числами.

	СТР.
ГЛАВА I. Сложеніе и вычитаніе цѣлыхъ чиселъ	1
ГЛАВА II. Умноженіе цѣлыхъ чиселъ	5
ГЛАВА III. Дѣленіе цѣлыхъ чиселъ	15

ОТДѢЛЪ II. §§ 42—95.

Основные свойства чиселъ.

ГЛАВА I. А. О дѣлимости чиселъ	23
Б. Признаки дѣлимости чиселъ	27
ГЛАВА II. Теорія общаго наибольшаго дѣлителя	32
ГЛАВА III. Теорія общаго наименьшаго кратнаго	39
ГЛАВА IV. Теорія абсолютна-противъ чиселъ	45
ГЛАВА V. О дѣлимости чиселъ, представленныхъ въ видѣ произведе- нія простыхъ множителей	51

ОТДѢЛЪ III. §§ 96—150.

Д р о б и.

ГЛАВА I. Основные свойства дробей	54
ГЛАВА II. Дѣйствія надъ дробями	60
ГЛАВА III. Десятичные дроби	67
Дѣйствія надъ десятичными дробями	69
ГЛАВА IV. Обращеніе обыкновенныхъ дробей въ десятичныя	72
ГЛАВА V. Историческія десятичныя дроби	79
ГЛАВА VI. Обращеніе периодическихъ дробей въ обыкновенныя	93
ПРИЛОЖЕНІЕ. Программа вступительнаго экзамена по Ариѳметикѣ, принятая во всѣхъ Институтахъ	99



Цѣна 1р. 40 коп.

~~Цѣна 90 коп.~~